X
D 19
DA
1
J92

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 170

Heft 1/2

Ausgegeben den 10. November 1933

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1933

Band 170. Heft 1/2.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Faksimilierte Wiedergabe einer Adresse von Leopold Kronecker an Eduard Kummer zum 80. Geburtstag am 29. Januar 1890 1

Hasse, Helmut, und **Friedrich Karl Schmidt,** Die Struktur diskret bewerteter Körper . 4

Fladt, Kuno, Die Umkehrung der ebenen quadratischen Cremonatransformation . . . 64

Rédei, L., und **H. Reichardt,** Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers 69

Reichardt, Hans, Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper 75

Ostrowski, Alexander, Über Nullstellen stetiger Funktionen zweier Variabeln 83

Jonas, Hans, Simultane Transformationen für gewisse Klassen von Raumkurven . . . 95

Myrberg, P. J., Über stetige Funktionen einer reellen Variablen, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen 107

Haenzel, Gerhard, Eine geometrische Konstruktion der transfiniten Zahlen Cantors . . 123

Lorey, Wilhelm, Eine Lücke in Leonhard Eulers Beweis, daß eine ganze rationale Funktion einer Veränderlichen nicht nur Primzahlen darstellen kann 129

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Faksimilierte Wiedergabe einer Adresse von Leopold Kronecker an Eduard Kummer zum 80. Geburtstage am 29. Januar 1890.

Wir bringen auf den Seiten 1—3 dieses Bandes ein bisher unveröffentlichtes Dokument aus dem Nachlaß Kroneckers zum Abdruck, bei dessen Abfassung der Herausgeber dieses Journals als junger Berliner Dozent persönlich zugegen war, und das sich kürzlich durch einen glücklichen Zufall in einem Exemplar der großen arithmetischen Festschrift Kroneckers wiederfand, das die Witwe Kummers dem Herausgeber zum Dank für dessen Kummer-Gedächtnisrede im Jahre 1910 gewidmet hatte. Kronecker hat diesen Brief als ein Gegenstück zu jener Festschrift gedacht. Wie er in jener ausführlich seine tiefsten Gedanken über die arithmetische Durchdringung der *Algebra* wiedergegeben hatte, so sollte dieser Brief in Kürze seine ebenso tiefen Gedanken über die arithmetische Durchdringung eines großen Gebietes aus der *Analysis* bringen. Andrerseits stellt der Brief eine wertvolle Ergänzung zu den berühmten großen Kroneckerschen Arbeiten über elliptische Funktionen dar. Kronecker findet hier als leitenden Gesichtspunkt für die allgemeine Theorie der elliptischen Funktionen die Darstellung der „irrationalen" Teilwerte, gegeben durch ihre „Relativkoordinaten" σ, τ (relativ zum Periodenparallelogramm), und damit also des gesamten Wertevorrats der Funktion, als Invarianten eines arithmetischen Äquivalenzbegriffs in der Theorie der quadratischen Formen. Dieser Zusammenhang hatte sich ihm zunächst in dem Spezialfall der singulären Moduln und rationalen Teilwerte dargeboten. Dort ist Kroneckers Auffassung wesentlich identisch mit dem Grundgedanken der „Komplexen Multiplikation", die in diesen singulären Teilwerten Invarianten für die arithmetische Äquivalenz der *ganzzahligen* quadratischen Formen (Ringklassen) mit linearen Nebenbedingungen (Strahlklassen) feststellt. Seine hier mitgeteilte Entdeckung zeigt, daß die allgemeinen (irrationalen) Teilwerte bei beliebigen (auch nichtsingulären) Moduln in ganz der entsprechenden Beziehung zu einem entsprechend verallgemeinerten Äquivalenzbegriff für *beliebige* quadratische Formen stehen.

Die Herausgeber.

Berlin 29. Januar 1890.

Hochverehrter Freund,

Ihr Brief hat mich über meine 55 Jahre in tiefere Nachdenklichkeit versetzt, zu deren siebzigstem Geburtstage mir 10 Jahre eine unbegreifliche Wahrscheinlichkeit zu sein schien, da ich ihn im Monat Januar des Jahres 1880 unverhofft sah, so daß ich mich sogar veranlaßt sah, die Feier des 70sten Jahres auf den achtzigsten Geburtstag zu verlegen. Meine ursprünglich kleine Beschäftigung, daß in der Theorie der elliptischen Functionen die Jacobischen und Abel'schen Ansätze durch Reihen fortgesetzt werden soll, hat sich inzwischen, daß die verschiedenen Entwickelungen, welche sich für jene ergeben, verschiedenartigen Gebieten convergiren; und daß es gerade nothwendig Entwickelungen gewesen sind, welche auf Divergenz geführt haben, wird durch unendlich häufig gewordene Anwendungen bestätigt. Ich bin Ihnen für Ihre Mittheilungen über Ihre beste Dankbarkeit gewendet und die geschehene Zusendung (Note) dankend!

Ihre neuen eigenen Untersuchungen über die elliptischen Functionen mit imaginären Perioden, welche über 34 Jahre des Alterthums erreichen, sind von ganz besonderer Wichtigkeit, und ich bin Ihnen für die Mittheilung derselben mit der Theorie der ganzen Zahlen verbunden. Ihre Arbeit scheint mir, daß zur elliptischen Transcendenten die analytische Darstellung der ganzen Zahlen durch Exponentialgrößen zu verfolgen, daß also die Theorie der elliptischen Transcendenten „Functionen" durch Exponentialgrößen Eingang findet. Ich glaube Ihnen daß Ihre Entdeckung auf dem Gebiet der Exponentialgrößen gelungen ist, wenn Sie auch die elliptischen Functionen mit Imaginären (unendlich) Perioden zu behandeln. Um den Grund der Entdeckung der elliptischen Functionen darlegen zu können, scheint es mir Bemerkungen über allgemeine Functionen nöthig.

Mit dem Wort Function gewöhnlich gemeinsamen Ausdruck „Functionen" sind gewöhnlich nur eindeutige Functionen der Exponentialgrößen oder Formen dargestellt worden, welche bei gewissen Formenformationen der Variabeln die Formen ungeändert bleiben, oder welche Ausdrücke so gestalten, daß nur einfache, bei Formenformationen ungeändert bleibende Veränderungen eintreten können. Diese wesentliche Einschränkung des Functionsbegriffs hat Riemann, daß dieselben nur allgemeinen, abstracten Betrachtungen eingeführt. Da der Theil nicht der Functionsbegriff, denn so ist der Einschränkung formalen Begriffen nicht eine Formenformation einer Function bestimmt und nur allgemeinen Betrachtungen eingeführt ist, da die allgemeinen Functionen

verloren.

...ssoben. Nun gehe Abstandsform, gibt es zu jeder Substitution, welche eine Gruppe der Determ. 1 bildet, genau eine Äquivalenz, und zwar vor der Abstandsform hervorgehend Äquivalenz, z.B. eine Spiegelungsäquivalenz, welche die Invariante der Äquivalenz. Diese einfachste Definition gibt Anlaß zu folgender Definition: „Der Abstand"

„zweier ganzen Zahl in der Zahlenebene eines Kreises."

Es gebe nun zwei in der Theorie der quadratischen Formen, wenn sie zwei Systeme (a,b,c), (a',b',c') als äquivalent zu bezeichnen, wenn die beiden quadratischen Formen $ax^2+bxy+cy^2$, $a'x^2+b'xy+c'y^2$ durch lineare Transformationen und ganzzahligen Koeffizienten in einander übergehen. Aber es ist nicht auf jede ganze Zahl (a,b,c) und zugehörig auf zwei Abstandsformen δ, ε Anzahl. Es kommt auf diese Weise zu folgender Äquivalenzbegriff:

Setzen $\delta, \varepsilon, a_0, b_0, c_0$ reelle Größen und sei $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$, so heißt das System:

$$(\delta, \varepsilon, a_0, b_0, c_0)$$

eine Lösung 4 Größen $\delta, \varepsilon, a_0, b_0$ bestimmt sind. Wenn seien zwei Systeme:

$$(\delta, \varepsilon, a_0, b_0, c_0), \quad (\delta', \varepsilon', a_0', b_0', c_0')$$

„äquivalent" heißen, wenn die Bedingungen gleichungen erfüllt sind:

$$\delta' = \alpha\delta + \alpha'\varepsilon + \alpha'', \quad \varepsilon' = \beta\delta + \beta'\varepsilon + \beta'', \quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1, \quad (\alpha', \beta \text{ ganze Zahlen})$$
$$a_0' = a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \quad b_0' = 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta'.$$

Diese Äquivalenz ordnet nun die allgemeinen Formen der zwei quadratischen Irrationalen.
Um sie nun in den der Anschauung leichter zugänglichen Begriffen überzutragen, setzen K, K' die Lösungen der Gleichung:

$$a_0K^2 + b_0KK'i + c_0K'^2, \quad a_0K^2 + b_0KK'i - c_0K'^2.$$

Durch den Quotienten $\frac{K}{K'}$ bestimmt sich umgekehrt alles Übrige. Die zugehörigen Moduln κ_1 und κ_2 sind conjugierte ganzzahlige Größen, nämlich:

$$\kappa_1 \text{ ist } \operatorname{am}(2\delta K_1 + 2\varepsilon K_1'i, \kappa_1), \quad \kappa_2 \text{ ist } \operatorname{am}(2\delta K_2 + 2\varepsilon K_2'i, \kappa_2),$$

und: $\kappa_1 + \kappa_2$, $i(\kappa_1 - \kappa_2)$ waren die Basis und die mit i multiplizierte Differenz zweier beider allgemeinen Formen welche die 4 willkürlichen ganzzahligen Faktoren der obigen Äquivalenz.

Die Einteilung der allgemeinen Formen in Formen mit zwei gemeinen reellen Abstandsvariablen, für die ich jetzt gehalten möchte, sei mir vielleicht durch folgenden Ausdruck gebrauch die allgemeine Form:

$$\operatorname{am}(2\delta K + 2\varepsilon K'i, \kappa)$$

in einer mit einem der Abstandsvariablen um δ oder ε fortschreitenden Formen derjenigen zu

anderen

entwickeln. Dies hat die folgenden eleganten Resultate ergeben:

$$\text{I} \qquad i\kappa \operatorname{sinam} 2(\sigma K + \tau K' i) = \sum_{g,h} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}g} \sin(h\sigma + g\tau)\pi}{gK - hK'i},$$

wo g alle <u>geraden</u> und h alle <u>ungeraden</u> positiven und negativen Werthe durchläuft.
Hieraus folgt:

$$\text{II} \qquad \kappa = \sum_{g,h} \frac{i^{g+h}}{gK - hK'i}$$

und endlich die merkwürdige Gleichung:

$$\text{III} \qquad \sum_{g,h} \frac{(-1)^{\frac{h-1}{2}}}{hK + gK'i} = 1,$$

in welcher aber die Summation <u>erst</u> in Beziehung auf h auszuführen ist. Diese letztere Gleichung stellt die transcendente Beziehung in welcher K und K' zu einander stehen, wohl in der elegantesten Weise dar.

Daß in allen obigen Reihen die Summation auch in derjenigen Folge ausgeführt werden kann, welche bei linearer Transformation der Summationsbuchstaben entsteht, habe ich noch manchen vergeblichen Versuchen nunmehr in sehr einfacher direkter Weise bewiesen. Die ganze Theorie der linearen Transformation der elliptischen Functionen wird damit in Evidenz gesetzt.

In innigster Liebe und Dankbarkeit
stets dein
Leopold Kronecker

Die Gleichung III kann besser in folgender Form aus der Gleichung I für $\sigma = \frac{1}{2}$, $\tau = \frac{1}{2}$ entnommen werden:

$$\lim_{\tau = \frac{1}{2}} \sum_{g,h} \frac{(-1)^{\frac{g+h-1}{2}} \sin g\tau\pi}{gK - hK'i} = 1,$$

denn dann kann die Summation wieder in jener mannigfaltigen Weise ausgeführt werden.

D.

Die Struktur diskret bewerteter Körper.

Von *Helmut Hasse* in Marburg und *Friedrich Karl Schmidt* in Erlangen.

Einleitung *).

1. Fragestellung. In der Entwicklung der modernen Algebra spielen bekanntlich zwei verschiedene Gedankenrichtungen eine entscheidende Rolle: Einmal die Tendenz, von jeder Einzeltatsache zu allgemeinen Begriffen aufzusteigen und sie damit als Sonderfall einer nur von wenigen Voraussetzungen abhängigen, einfachen, weitreichenden Theorie zu begreifen [1]); andererseits aber das Bestreben, von dem so gewonnenen Standpunkt aus umgekehrt die Gesamtheit alles dessen zu überblicken, was den gebildeten abstrakten Begriffen untergeordnet ist, also den Weg vom Allgemeinen zu seinen sämtlichen möglichen Spezialisierungen zurückzufinden [2]).

Die Fragestellung der vorliegenden Arbeit gehört der zweiten dieser Ideenrichtungen an, die man im Gegensatz zu der ersten, häufig als abstrakt oder formal charakterisierten, auch als die konkrete Auffassung innerhalb der modernen Algebra bezeichnen kann. Wir gehen im folgenden aus von dem allgemeinen Begriff des bewerteten Körpers, der bekanntlich aus den Henselschen Untersuchungen über die p-adischen Zahlen erwachsen ist, und beschäftigen uns mit der Aufgabe, sämtliche möglichen Strukturen bewerteter Körper wirklich anzugeben.

2. Präzisierung der Fragestellung. Ein Körper oder noch allgemeiner ein Integritätsbereich heißt bekanntlich nach Kürschák [3]) *bewertet*, wenn seinem Nullelement als Betrag die reelle Zahl $|0| = 0$ und jedem seiner Elemente $\alpha \neq 0$ als Betrag eine reelle Zahl $|\alpha| > 0$ so zugeordnet ist, daß die beiden folgenden für den absoluten Betrag gültigen Rechenregeln bestehen:

$$(1) \qquad |\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|\,, \qquad (2) \quad |\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|\ [4])\,.$$

Dabei spricht man von der *trivialen* Bewertung, wenn der Betrag jedes von Null verschiedenen Elements gleich 1 ist, und von einer *nichttrivialen* Bewertung, wenn mindestens ein von Null verschiedenes Element mit einem von 1 verschiedenen Betrag existiert. Der Begriff der Bewertung ist also offenbar nichts anderes als die Übertragung des von

*) Eine Inhaltsübersicht befindet sich am Schluß der Einleitung, da die einzelnen Überschriften erst dort verständlich sein werden.

[1]) Als Beispiele seien etwa der von E. Noether entworfene „Abstrakte Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern", Math. Ann. **96** (1927), und die von E. Artin und O. Schreier stammende Theorie der formal reellen Körper, Hamb. Abh. **5** (1927), angeführt.

[2]) Hierher gehören u. a. die Steinitzschen Untersuchungen, wonach jeder Körper zu einer algebraischen Erweiterung eines Körpers rationaler Funktionen mit Koeffizienten aus einem Primkörper isomorph ist; ferner der Wedderburnsche Satz, der aussagt, daß sich jedes halbeinfache hyperkomplexe System als direkte Summe voller Matrizensysteme aus Schiefkörpern darstellen läßt.

[3]) J. Kürschák, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, J. reine angew. Math. **142** (1912), S. 221.

[4]) Die in der Einleitung zusammengestellten Erklärungen sind nur vorläufig und sollen das Verständnis der Fragestellung sowie der angegebenen Resultate erleichtern. Soweit sie bei den Beweisen gebraucht werden, werden sie in den ersten Paragraphen des Hauptteils noch einmal ausführlich wiederholt.

den Zahlen her geläufigen absoluten Betrages auf beliebige Integritätsbereiche. Seine Bedeutung liegt daher auch in erster Linie darin, daß sich in einem bewerteten Integritätsbereich ohne weiteres alle Definitionen einführen lassen, die bei den Zahlen auf dem absoluten Betrag beruhen, wie etwa die des Häufungspunkts, des Grenzelements einer Folge, der konvergenten Folge [5]) u. s. f.

Gerade so wie man in der allgemeinen Körpertheorie nicht die besondere Natur der Körperelemente, sondern nur ihre Verknüpfung durch die rationalen Rechenoperationen als das Wesentliche betrachtet, liegt auch in der Theorie der bewerteten Körper der Nachdruck nicht auf dem zahlenmäßigen Wert der den Elementen aufgeprägten Beträge, sondern vielmehr auf den Größenbeziehungen, die durch die Bewertung zwischen den Elementen geschaffen werden. Man schreibt daher zwei bewerteten Körpern dieselbe *Struktur* zu, wenn sich zwischen ihnen ein Isomorphismus unter Erhaltung dieser Größenbeziehungen herstellen läßt, oder genauer: ein solcher Isomorphismus, bei dem für zwei einander zugeordnete Elementepaare α, β und α', β' stets gleichzeitig $|\alpha| \gtreqless |\beta|$ und $|\alpha'| \gtreqless |\beta'|$ ist. Ein derartiger Isomorphismus wird auch kurz ein *analytischer Isomorphismus* [6]) genannt, sodaß also die Struktur das gegenüber analytischer Isomorphie Invariante darstellt, ebenso wie der Körpertypus das gegenüber Isomorphie schlechthin Invariante ist.

Da jeder beliebige Körper auf eine und nur eine Weise trivial bewertet werden kann, indem man nämlich allen seinen von Null verschiedenen Elementen den Betrag 1 zuteilt, bietet die Struktur der trivial bewerteten Körper kein Interesse. Die triviale Bewertung wird im folgenden vielmehr nur als methodisches Hilfsmittel auftreten. Ganz anders liegen dagegen die Verhältnisse bei den nichttrivial bewerteten Körpern. Für sie soll die Aufgabe, alle möglichen Strukturen zu bestimmen, in der vorliegenden Arbeit behandelt werden.

3. Reduktion der Fragestellung. Die soeben formulierte Aufgabe kann nun mit Hilfe bewertungstheoretischer Tatsachen sogleich auf die Untersuchung einer speziellen Klasse nichttrivial bewerteter Körper reduziert werden.

Man sagt nämlich allgemein, ein bewerteter Integritätsbereich $\mathfrak{l}$ sei *vollständig*, wenn jede konvergente Folge in $\mathfrak{l}$ ein Grenzelement besitzt; man nennt ferner $\mathfrak{l}$ *insichdicht*, wenn jedes Element von $\mathfrak{l}$ Häufungspunkt von $\mathfrak{l}$ ist. In diesem Sinn ist ein trivial bewerteter Integritätsbereich stets vollständig, aber niemals insichdicht; ein nichttrivial bewerteter Integritätsbereich dagegen stets insichdicht, aber nicht notwendig vollständig, wie schon das Beispiel der durch den absoluten Betrag bewerteten rationalen Zahlen lehrt. Mit Hilfe des Verfahrens, das G. Cantor zur Bildung der irrationalen Zahlen verwandte, läßt sich jedoch auch jeder nichttrivial bewertete Integritätsbereich $\mathfrak{l}$ unter Erhaltung seiner Bewertung zu einem kleinsten vollständigen Oberintegritätsbereich, der vollständigen Hülle von $\mathfrak{l}$, ergänzen, die dann offenbar gleichzeitig insichdicht und vollständig ist und daher kurz *perfekt* genannt wird. Ist der ursprüngliche Integritätsbereich ein Körper K, so ist auch seine vollständige Hülle ein Körper und steht zu K in ganz entsprechender Beziehung wie der Körper der reellen zu dem der rationalen Zahlen.

Da jeder nichttrivial bewertete Körper samt seiner Bewertung in einen perfekten eingebettet werden kann, sind mit der Struktur der perfekten Körper zugleich die Struk-

---

[5]) α heißt *Grenzelement* der Folge α_n, wenn $|\alpha - \alpha_n| \to 0$ für $n \to \infty$. *Konvergent* heißt eine Folge α_n, bei der $|\alpha_m - \alpha_n| \to 0$ für $m, n \to \infty$.

[6]) Dieser Begriff des analytischen Isomorphismus ist weiter als der von A. Ostrowski (Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(xy)$, Acta math. **41** (1917), S. 278) eingeführte. Ostrowski spricht von einem analytischen Isomorphismus nur dann, wenn einander entsprechende Elemente gleichen Betrag haben.

turen aller nichttrivial bewerteten Körper überhaupt bekannt. Es genügt daher, die möglichen Strukturen der perfekten Körper zu bestimmen. Für diese reduzierte Aufgabe sind dann a priori noch ganz verschiedene Arten der Lösung denkbar. Man kann einmal danach trachten, für jede Struktur genau einen Repräsentanten anzugeben, so daß also jeder perfekte Körper einem und nur einem der aufgestellten Repräsentanten analytisch isomorph ist. Man kann aber auch andererseits die verschiedenen Strukturen durch einfache Invarianten zu charakterisieren suchen. Beide Lösungsarten werden bei unseren Überlegungen eine Rolle spielen.

4. Der Ostrowskische Satz. Die Frage nach der Struktur der perfekten Körper ist bereits vor längerer Zeit von A. Ostrowski in Angriff genommen worden [7]). Ostrowski geht dabei von einer Einteilung aller Bewertungen aus, die sich als äußerst wichtig erwiesen hat und die wir daher kurz auseinandersetzen müssen.

Betrachtet man in einem bewerteten Integritätsbereich $\mathfrak{l}$ die Vielfachen n des Einselements, so sind offenbar zwei verschiedene Fälle möglich. Entweder es ist für jedes n der Betrag $|n| \leqq 1$; oder es gibt mindestens ein n mit einem Betrag $|n| > 1$. Im ersten Fall nennt Ostrowski den Integritätsbereich *nichtarchimedisch* bewertet, im zweiten dagegen *archimedisch* bewertet. Das nächstliegende Beispiel einer archimedischen Bewertung liefert der mit dem absoluten Betrag bewertete Körper der rationalen Zahlen, während derselbe Körper bei der durch eine feste Primzahl p erzeugten p-adischen Bewertung [8]) als nichtarchimedisch bewertet erscheint.

Im Falle einer archimedischen Bewertung hat nun Ostrowski das Strukturproblem für perfekte Körper völlig gelöst, indem er gezeigt hat:

Jeder archimedisch bewertete perfekte Körper ist analytisch isomorph entweder zu dem mit dem absoluten Betrag bewerteten Körper aller reellen Zahlen oder zu dem mit dem absoluten Betrag bewerteten Körper aller komplexen Zahlen.

Auf Grund dieses Ostrowskischen Resultats bleibt also die Frage nach der Struktur der perfekten Körper nur noch für die nichtarchimedischen Bewertungen offen. In der vorliegenden Arbeit soll sie weiter für einen arithmetisch besonders wichtigen Teil der nichtarchimedischen Bewertungen, nämlich für die diskreten (s. u.) Bewertungen beantwortet werden.

5. Nichtarchimedische und Exponentenbewertung. In einem nichtarchimedisch bewerteten Integritätsbereich $\mathfrak{l}$ gilt bekanntlich an Stelle des gewöhnlichen Summenpostulates

$$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$$

stets das schärfere

$$|\alpha + \beta| \leqq \text{Max } (|\alpha|, |\beta|)\ ^{9}).$$

Ordnet man daher jedem von 0 verschiedenen Element α aus $\mathfrak{l}$ anstatt des Betrages $|\alpha|$ den in bezug auf eine feste positive Basis $b < 1$ genommenen Logarithmus des Betrages als Exponentenwert $w(\alpha) = \overset{b}{\log} |\alpha|$ zu, so erhält man für $\mathfrak{l}$ eine zu der ursprünglichen Kürschákschen Bewertung gehörige *Exponentenbewertung*, d. h. eine Belegung w, für die

$$w(\alpha\beta) = w(\alpha) + w(\beta) \quad \text{und} \quad w(\alpha + \beta) \geqq \text{Min } (w(\alpha), w(\beta))$$

---

[7]) loc. cit. [6]).

[8]) Um diese p-adische Bewertung zu erhalten, denke man sich jede rationale Zahl r in der Form $r = p^e q$ dargestellt, wo q Quotient zweier zu p primer ganzer Zahlen und $e \gtrless 0$ ist. Ist dann b eine fest gewählte positive Zahl < 1, so setze man $r = b^e$. — Die perfekte Hülle des p-adisch bewerteten Körpers der rationalen Zahlen ist der Körpers der Henselschen p-adischen Zahlen.

[9]) Vgl. loc. cit. [6]).

ist. Die mit Hilfe des Betrages erklärten Begriffe des Grenzwerts, der Fundamentalfolge u. s. f. können dann in I auch mit Hilfe dieser Exponentenbewertung formuliert werden. Allerdings kehren sich die Größenbeziehungen beim Übergang zur Exponentenbewertung um, d. h. zu 0 abnehmenden Beträgen entsprechen gegen ∞ wachsende Exponentenwerte, und das führt zu einer leicht ersichtlichen Modifikation in der Definition des Grenzwerts und der Fundamentalfolge, während dagegen die früher gegebene Erklärung des analytischen Isomorphismus auch dem Wortlaut nach bestehen bleibt.

Jede Exponentenbewertung w kann, wie man unschwer erkennt, in der vorhin geschilderten Weise aus einer nichtarchimedischen Bewertung im Ostrowskischen Sinne gewonnen werden, nämlich aus der Kürschákschen Bewertung, die durch die Festsetzung $|\alpha| = b^{w(\alpha)}$ entsteht. Exponentenbewertung und nichtarchimedische Bewertung im Ostrowskischen Sinne sind also äquivalent. Die Benutzung der Exponentenbewertung bringt jedoch manche Vereinfachungen in der Vorstellung und in der Ausdrucksweise mit sich, wie man z. B. unmittelbar an dem p-adisch bewerteten Körper der rationalen Zahlen sieht, bei dem die Exponentenwerte einfach als diejenigen Exponenten gewählt werden können, mit denen die Primzahl p in den einzelnen rationalen Zahlen aufgeht. Wir werden daher bei den folgenden Betrachtungen stets eine Exponentenbewertung zugrundelegen. Diejenige Exponentenbewertung, bei der jedes von Null verschiedene Element den Exponentenwert 0 besitzt und die offenbar der zu Anfang erwähnten trivialen Bewertung durch den Betrag 1 entspricht, werden wir dabei wiederum als trivial bezeichnen.

6. Arithmetische Bedeutung der Exponentenbewertung. Jeder Exponentenbewertung eines Körpers K entspricht ein eindeutig bestimmter Integritätsbereich B aus K, der zugehörige *Bewertungsring*, und ein eindeutig bestimmtes Primideal $\mathfrak{p}$ von B, das *zugehörige Primideal.* Dabei besteht B aus der Null und allen Körperelementen mit nichtnegativem Exponentenwert, $\mathfrak{p}$ aus der Null und allen Körperelementen mit positivem Exponentenwert; K ist der Quotientenkörper von B. Auf diesem Zusammenhang beruht die besondere Bedeutung der Exponentenbewertungen für die Anwendung in der allgemeinen Arithmetik. Die Bewertungsringe können nämlich auch ohne jede Bezugnahme auf irgendeine Bewertung rein arithmetisch charakterisiert werden, und zwar ist ein Integritätsbereich dann und nur dann ein Bewertungsring seines Quotientenkörpers, wenn er erstens höchstens ein von Null verschiedenes Primideal enthält und zweitens von je zweien seiner Ideale stets mindestens eins durch das andere teilbar ist [10]). Das zugehörige Primideal ist entweder gleich dem vom Nullideal verschiedenen Primideal des Bewertungsrings oder, falls ein solches nicht existiert, gleich dem Nullideal. Dabei tritt dieser letzte Fall dann und nur dann ein, wenn der Bewertungsring zur trivialen Bewertung gehört. Sind zwei mit Exponentenbewertungen versehene Körper analytisch isomorph, so sind die zugehörigen Bewertungsringe isomorph schlechthin und umgekehrt [11]). Auch das Strukturproblem nichtarchimedisch bewerteter Körper ist also mit einer rein arithmetischen Aufgabe gleichwertig, nämlich mit der Bestimmung aller Typen von Bewertungsringen.

Für die Struktur eines mit Exponentenbewertung versehenen Körpers K erweist sich nun der Restklassenkörper $\mathfrak{R} = \mathsf{B}/\mathfrak{p}$ des zugehörigen Bewertungsrings B nach seinem Primideal $\mathfrak{p}$ als besonders wichtig. Für die Charakteristik dieses Körpers $\mathfrak{R}$, den wir kurz den *zugehörigen Restklassenkörper* nennen wollen, bestehen dabei zwei Möglichkeiten. Entweder

[10]) Vgl. W. Krull, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern II, Math. Z. **31** (1930), S. 527—557.

[11]) Vgl. § 2, Nr. 5 der vorliegenden Arbeit.

a) (charakteristikgleicher Fall) die Charakteristik des zugehörigen Restklassenkörpers $\mathfrak{R}$ stimmt mit der des Gesamtkörpers K überein, $\chi(\mathfrak{R}) = \chi(\mathsf{K})$;
oder

b) (charakteristikungleicher Fall) die Charakteristik von $\mathfrak{R}$ ist von der Charakteristik von K verschieden, $\chi(\mathfrak{R}) \neq \chi(\mathsf{K})$.

Der erste, charakteristikgleiche Fall liegt sicher stets vor, wenn der Gesamtkörper K bereits eine Primzahlcharakteristik besitzt. Der zweite, charakteristikungleiche Fall kann also nur dann eintreten, wenn $\chi(\mathsf{K}) = 0$, $\chi(\mathfrak{R}) = p$ ist. Die Primzahl p muß dann notwendig in dem Primideal des zugehörigen Bewertungsrings liegen, d. h. K enthält dann stets den p-adisch bewerteten Körper der rationalen Zahlen. Ist K perfekt, so ist er infolgedessen sogar Oberkörper des Henselschen Körpers der p-adischen Zahlen.

7. Diskrete Bewertung. In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns bei der Behandlung des Strukturproblems zunächst auf eine besondere Art von Exponentenbewertungen bzw. von nichtarchimedischen Bewertungen im Ostrowskischen Sinne. Denkt man sich nämlich bei einer beliebigen Bewertung die den Körperelementen zugeordneten Beträge bzw. Exponentenwerte auf der reellen Zahlgeraden aufgetragen, so kann die entstehende Punktmenge überall dicht liegen oder nicht [12]). Ist sie nicht überall dicht, so ist die Null der einzige endliche Häufungspunkt für die Beträge, während die Exponentenwerte im Endlichen überhaupt keinen Häufungspunkt besitzen [13]). Wir nennen die Bewertung dann *diskret* oder im nichttrivialen Fall auch *ganzzahlig*, denn es können die Exponentenwerte dann stets so gewählt werden, daß sie mit allen ganzen Zahlen übereinstimmen. Bei einem diskret und nichttrivial bewerteten Körper nehmen wir die Exponentenwerte im folgenden immer in dieser einfachsten Weise normiert an.

Die diskret und nichttrivial bewerteten Körper K spielen in der Theorie der algebraischen Zahl- und Funktionenkörper endlichen Grades eine hervorragende Rolle. Bei den diskreten Bewertungen und nur bei ihnen stimmen nämlich sämtliche Ideale eines Bewertungsringes mit den Potenzen des zugehörigen Primideals überein, so daß jedes Ideal eines solchen Bewertungsrings B ein Hauptideal ist. Bei unserer Normierung lassen sich dann auch die Exponentenwerte selbst arithmetisch deuten: Sie sind einfach die Exponenten, mit denen das zugehörige Primideal $\mathfrak{p}$ in den einzelnen Elementen aufgeht. Die Verhältnisse liegen mithin ganz entsprechend wie in dem p-adisch bewerteten Körper der rationalen Zahlen. Insbesondere stellt jedes Element π mit dem Exponentenwert 1 ein Primelement, d. h. eine Basis von $\mathfrak{p}$ dar, und es kann jedes Körperelement α in eine eindeutig bestimmte π-adische Reihe

$$\alpha = \varrho_a \pi^a + \varrho_{a+1} \pi^{a+1} + \cdots$$

entwickelt werden, bei der a eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet und die Koeffizienten ϱ_i einem festgewählten Repräsentantensystem der Restklassen von $\mathsf{B}/\mathfrak{p}$ entstammen [14]). K ist dann und nur dann perfekt, wenn bei diesen Reihenentwicklungen seiner Elemente sämtliche π-adischen Reihen wirklich auftreten.

---

[12]) Infolge der Beziehung $|\alpha| = b^{w(\alpha)}$ liegen Beträge und zugehörige Exponentenwerte stets gleichzeitig überall dicht oder nicht.

[13]) Zu der Behauptung über die Exponentenwerte vgl. § 3, Nr. 1 der vorliegenden Arbeit. Daß aus dieser Behauptung die Aussage über die Beträge folgt, ist klar. — Übrigens liegen bei einem archimedisch bewerteten Körper die Beträge stets überall dicht; ein solcher Körper enthält ja nach dem Ostrowskischen Satz einen Unterkörper, der zu dem mit dem absoluten Betrag bewerteten Körper der rationalen Zahlen analytisch isomorph ist.

[14]) Obwohl die π-adischen Reihen nach Potenzen von π fortschreiten, gilt für sie selbstverständlich im allgemeinen nicht der von den Potenzreihen her bekannte Algorithmus der Summen- und Produktbildung. Vielmehr ist gerade so wie bei den p-adischen Zahlen beim Addieren und Multiplizieren der Koeffizienten das Resultat stets wieder auf einen Repräsentanten zu reduzieren und der Überschuß auf die folgenden Glieder der Reihe zu übertragen.

8. Zusammenstellung der Ergebnisse[14a]). Für die diskret bewerteten perfekten Körper soll nun nachstehend ein Überblick über alle möglichen Strukturen gegeben werden[15]). Dabei wird sich herausstellen, daß sich diese Strukturen im charakteristikgleichen Fall völlig durch die gewöhnliche Potenzreihenbildung beschreiben lassen, während im charakteristikungleichen Fall ein etwas komplizierteres Konstruktionsverfahren auftritt.

a) (Charakteristikgleicher Fall.) Ist $\mathfrak{R}$ ein beliebig vorgegebener Körper, so läßt sich ohne weiteres ein diskret bewerteter perfekter mit seinem Restklassenkörper charakteristikgleicher Körper K angeben, dessen Restklassenkörper mit $\mathfrak{R}$ isomorph ist. Man braucht zu diesem Zwecke nur den nach Potenzen von x bewerteten Potenzreihenkörper $\mathfrak{R}(\overline{x})$ aller Potenzreihen in der Unbestimmten x mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ zu betrachten, d. h. 0 und die Gesamtheit aller formal hingeschriebenen Reihen

$$\sigma = \mathfrak{a}_s x^s + \mathfrak{a}_{s+1} x^{s+1} + \cdots \qquad (\mathfrak{a}_i \text{ aus } \mathfrak{R},\ \mathfrak{a}_s \neq 0),$$

bei denen s eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet und

$$w(\sigma) = s$$

gesetzt wird. Der zugehörige Bewertungsring ist dann nämlich der Integritätsbereich $\mathfrak{R}[\overline{x}]$ aller mit nichtnegativen Potenzen von x beginnenden Potenzreihen, das zugeordnete Primideal ist das aus x abgeleitete Ideal (x), und man hat $\mathfrak{R}[\overline{x}]/(x) \cong \mathfrak{R}$. Den Körper $\mathfrak{R}$ kann man offenbar als vollständiges Repräsentantensystem für die Restklassen von $\mathfrak{R}[\overline{x}]/(x)$ auffassen, und da der Körper $\mathfrak{R}(\overline{x})$ alle x-adischen Reihen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ enthält, ist er auch wirklich perfekt.

Die so gewonnenen Potenzreihenkörper bilden aber im vorliegenden Fall bereits ein vollständiges Repräsentantensystem für die sämtlichen möglichen Strukturen diskret bewerteter perfekter Körper. Es gilt nämlich:

A. *Im charakteristikgleichen Fall ist jeder diskret bewertete Körper mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ analytisch isomorph zu dem nach Potenzen von x bewerteten Potenzreihenkörper $\mathfrak{R}(\overline{x})$ aller Potenzreihen in der Unbestimmten x mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$.*

Läßt man also $\mathfrak{R}$ ein vollständiges Repräsentantensystem aller möglichen Körpertypen durchlaufen, so stellen die Potenzreihenkörper $\mathfrak{R}(\overline{x})$ tatsächlich das gesuchte vollständige Repräsentantensystem für die möglichen Strukturen dar. Damit ist in diesem Fall offenbar eine völlig befriedigende repräsentantenmäßige Lösung des Strukturproblems erzielt.

Das soeben ausgesprochene Resultat läßt sich auch noch etwas anders ausdrücken. Satz A besagt nämlich, daß ein diskret bewerteter perfekter Körper K, der mit

[14a]) In dem Sonderfall, daß der Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ nur endlich viele Elemente, enthält hat D. v. Dantzig bereits die Struktur der diskret bewerteten perfekten Körper bestimmt. Vgl. D. v. Dantzig, Studien over topologische algebra, Diss. Amsterdam 1931. Vgl. auch den Korrekturzusatz a. S. 14 bei W. Schöbe, Beiträge zur Funktionentheorie in nichtarchimedisch bewerteten Körpern, Diss. Halle, Münster 1930. — Die v. Dantzigschen Resultate sind als Spezialfälle in den unseren enthalten; die wesentlichen Schwierigkeiten unserer Untersuchung (vgl. Nr. 11 der Einleitung) treten jedoch bei v. Dantzig noch nicht auf. — Bei dieser Gelegenheit sei auch auf die Arbeiten von W. Krull hingewiesen, die sich mit dem Aufbau und der Typisierung primärer Ringe beschäftigen (Math. Ann. **88** (1922) und **91** (1924)). Die Krullschen Ergebnisse weisen trotz der sachlichen Verschiedenheit manche Ähnlichkeit mit den unseren auf. Auch bei Krull wird jedoch derjenige Fall, der den bei uns vorliegenden Schwierigkeiten entspricht, ausdrücklich von der Betrachtung ausgeschlossen. Es ist aber zu vermuten, daß sich die Krullschen Untersuchungen mit Hilfe der in der vorliegenden Arbeit ausgebildeten Methoden völlig zum Abschluß bringen lassen.

[15]) Wie der Jüngere von uns gezeigt hat, sind zwei isomorphe diskret bewertete perfekte Körper stets auch analytisch isomorph (vgl. F. K. Schmidt, Mehrfach perfekte Körper, Math. Ann. Bd. **108** (1933)). Zwei diskret bewertete perfekte Körper von gleichem Typus haben also auch die gleiche Struktur, und es genügt daher die verschiedenen Typen diskret bewerteter perfekter Körper zu bestimmen. Wir machen jedoch im folgenden von dieser Tatsache keinen Gebrauch, da sie keine Vereinfachungen in der Beweisführung ermöglicht.

seinem Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ charakteristikgleich ist, stets ein Repräsentantensystem für die Klassen von $\mathfrak{R}$ enthält, das selbst einen zu $\mathfrak{R}$ isomorphen Körper bildet. Ein solches Repräsentantensystem nennen wir kurz *relationstreu*. Der Gesamtkörper K kann dann also als Potenzreihenkörper in einer Unbestimmten mit Koeffizienten aus einem relationstreuen Repräsentantensystem von $\mathfrak{R}$ aufgefaßt werden. Dabei ist das relationstreue Repräsentantensystem von $\mathfrak{R}$ aber im allgemeinen durchaus nicht eindeutig bestimmt, d. h. bei einem Potenzreihenkörper kann man im allgemeinen mehrere Unterkörper mit gleichem Recht als „Koeffizientenkörper" bezeichnen.

Von Satz A aus läßt sich weiter leicht auch eine invariantenmäßige Lösung des Strukturproblems gewinnen. Aus ihm folgt nämlich, daß zwei diskret bewertete perfekte Körper mit isomorphem Restklassenkörper im charakteristikgleichen Fall analytisch isomorph sind. Da umgekehrt die Restklassenkörper zweier analytisch isomorpher Körper notwendig bis auf Isomorphie übereinstimmen, hat man also:

A'. *Im charakteristikgleichen Fall sind zwei diskret bewertete perfekte Körper dann und nur dann analytisch isomorph, wenn ihre Restklassenkörper isomorph schlechthin sind.*

Oder kurz: *Der Typus des Restklassenkörpers ist eine charakteristische Invariante für die Struktur der diskret bewerteten perfekten Körper.*

b) (Charakteristikungleicher Fall.) Ist die Charakteristik des diskret bewerteten perfekten Körpers K von der seines Restklassenkörpers $\mathfrak{R}$ verschieden, $\chi(K) = 0$, $\chi(\mathfrak{R}) = p$, so liegen die Verhältnisse etwas weniger einfach. Es sind dann zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich, ob

b_1) die Primzahl p im zugehörigen Bewertungsring Primelement bleibt, also $(p) = \mathfrak{p}$ ist, oder

b_2) p durch das zugehörige Primideal genau in einer Potenz $\mathfrak{p}^n$ mit $n > 1$ teilbar wird.

Im ersten Fall nennen wir den Körper K *unverzweigt* und bezeichnen die Bewertung sowie den Bewertungsring als *p-adisch*; im zweiten Falle heiße K dagegen *verzweigt* mit dem *Verzweigungsexponenten n.*

b_1) Wir behandeln zunächst die unverzweigten Körper und wollen ebenso wie im charakteristikgleichen Fall zu einem beliebig vorgegebenen Körper $\mathfrak{R}$ der Charakteristik p einen p-adisch bewerteten perfekten Körper K konstruieren, dessen Restklassenkörper zu $\mathfrak{R}$ isomorph ist. Da $\chi(K) \neq \chi(\mathfrak{R})$ ausfallen soll, kann der gesuchte Körper selbstverständlich nicht einfach als Oberkörper über $\mathfrak{R}$ aufgebaut werden. Wir dürfen bei seiner Bildung vielmehr nur einen Teil der zwischen den Elementen von $\mathfrak{R}$ bestehenden Relationen benutzen und müssen uns dazu vorerst die Gesamtheit dieser Relationen greifbar machen.

Sei also Γ der Integritätsbreich der ganzen rationalen Zahlen, $\mathfrak{P}$ der Primkörper von $\mathfrak{R}$. Jedem Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{R}$ denken wir uns eine Unbestimmte u zugeordnet und erweitern die so gewonnene eineindeutige Abbildung φ der Menge $U = \{u\}$ auf die Menge $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{a}\}$ zu einer homomorphen Abbildung Φ des Polynombereichs

$$\Gamma[U] \quad \text{auf} \quad \mathfrak{P}[\mathfrak{R}] = \mathfrak{R},$$

indem wir der 1 aus Γ das Einheitselement $\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{P}$ entsprechen lassen, also

$$\Phi\Big(\sum_{k_1 \cdots k_r} m_{k_1 \ldots k_r} u_1^{k_1} \cdots u_r^{k_r}\Big) = \sum_{k_1 \cdots k_r} m_{k_1 \ldots k_r} \mathfrak{e}\, \varphi(u_1)^{k_1} \cdots \varphi(u_r)^{k_r} \quad (m_{k_1 \ldots k_r} \text{ ganze rat. Zahlen})$$

setzen. Ist dann $\mathfrak{n}$ das Ideal aller Polynome aus $\Gamma[U]$, deren Bild in $\mathfrak{R}$ die Null ist, so ist

$$\Gamma[U] / \mathfrak{n} \cong \mathfrak{R},$$

d. h. wir haben $\mathfrak{R}$ als Restklassenkörper in einem ganzzahligen Polynombereich dargestellt und können alle Relationen zwischen den Elementen unmittelbar aus dem Ideal $\mathfrak{n}$ ablesen. Wegen $\chi(\mathfrak{R}) = p$ enthält $\mathfrak{n}$ sicher die Primzahl p.

Zur Konstruktion des gesuchten Körpers K gehen wir nun von $\Gamma[U]$ zunächst zu dem bezüglich Φ abgeschlossenen Quotientenring Q über, d. h. zu der Gesamtheit aller Quotienten $\frac{G(u)}{H(u)}$, deren Nennerpolynome durch den Homomorphismus Φ nicht auf die Null abgebildet werden, also nicht zu $\mathfrak{n}$ gehören. Die Primzahl p, die in dem Polynombereich $\Gamma[U]$ ein Primelement darstellt, ist auch in dem Quotientenring Q ein Primelement und erzeugt eine ganzzahlige Bewertung von Q. Es sei $\overline{Q}$ die perfekte Hülle von Q hinsichtlich dieser p-adischen Bewertung. Der Homomorphismus Φ läßt sich dann auf eine und nur eine Weise zu einem Homomorphismus $\overline{\Phi}$ von $\overline{Q}$ auf $\mathfrak{K}$ fortsetzen, und zwar ist das Ideal $\overline{\mathfrak{N}}$ aller durch $\overline{\Phi}$ auf die Null abgebildeten Elemente von $\overline{Q}$ gerade gleich dem Erweiterungsideal von $\mathfrak{n}$, $\overline{\mathfrak{N}} = \overline{Q}\mathfrak{n}$. Wir nennen $\overline{Q}$ einen zu $\mathfrak{K}$ homomorphen *Grundring*, $\overline{\mathfrak{N}}$ das *Grundideal* von $\overline{Q}$, und haben also die Beziehung $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{N}} \cong \mathfrak{K}$.

Aus dem Grundring $\overline{Q}$ werden wir jetzt sehr einfach durch Restklassenbildung nach einem geeigneten Unterideal von $\overline{\mathfrak{N}}$ einen p-adisch bewerteten perfekten Bewertungsring mit dem gegebenen Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ gewinnen. Zu diesem Zweck denken wir uns in dem Körper $\mathfrak{K}$ eine feste Wohlordnung W zugrundegelegt, $\mathfrak{K} = \{\mathfrak{a}_0, \ldots \mathfrak{a}_\lambda, \ldots\}$ und bezeichnen mit $\mathfrak{K}_\lambda$ den kleinsten Unterkörper von $\mathfrak{K}$, der alle $\mathfrak{a}_\lambda$ vorangehenden Elemente umfaßt. Jedem Element $\mathfrak{a}_\lambda$ werde ein durch $\mathfrak{a}_\lambda$ annulliertes irreduzibles Polynom $\mathfrak{G}_\lambda(x)$ über $\mathfrak{K}_\lambda$ zugeordnet, und zwar besitze $\mathfrak{G}_\lambda(x)$ das Einselement $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{K}$ als höchsten Koeffizienten, falls $\mathfrak{a}_\lambda$ über $\mathfrak{K}_\lambda$ algebraisch ist, dagegen sei $\mathfrak{G}_\lambda(x)$ gleich dem Nullpolynom, falls $\mathfrak{a}_\lambda$ über $\mathfrak{K}_\lambda$ transzendent ist. Ist dann U_λ die $\overline{\Phi}$-Urbildmenge von $\mathfrak{K}_\lambda$ in U und u_λ das $\overline{\Phi}$-Urbild von $\mathfrak{a}_\lambda$, so suchen wir zu $\mathfrak{G}_\lambda(x)$ zunächst ein $\overline{\Phi}$-Urbildpolynom $G_\lambda(x)$ auf, dessen Koeffizienten nur Unbestimmte aus U_λ enthalten, und das gleichzeitig mit $\mathfrak{G}_\lambda(x)$ das Einselement als höchsten Koeffizienten besitzt[15a]) bzw. gleich 0 ist. In $G_\lambda(x)$ ersetzen wir nachträglich x durch u_λ und bilden die bezüglich der Bewertung von $\overline{Q}$ abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ des Ideals, das in $\overline{Q}$ aus der Basis $\{G_0(u_0), \ldots G_\lambda(u_\lambda), \ldots\}$ abgeleitet ist,

$$\overline{\mathfrak{M}} = \langle G_0(u_0), \ldots G_\lambda(u_\lambda), \ldots \rangle .$$

$\overline{\mathfrak{M}}$ ist dann ein Ideal von $\overline{Q}$ und heiße ein zu W gehöriges *reduziertes Grundideal* von $\overline{Q}$ [16]). In ihm sind offenbar alle algebraischen Relationen zwischen den Elementen von $\mathfrak{K}$ berücksichtigt worden mit Ausnahme der wesentlich einzigen Relation $p\mathfrak{e} = 0$ des Primkörpers $\mathfrak{P}$ [16a]). Für das Grundideal $\overline{\mathfrak{N}}$ besteht daher, wie sich zeigt, die Gleichung $\overline{\mathfrak{N}} = (\overline{\mathfrak{M}}, p)$. Es gilt ferner:

Ist $\overline{\mathfrak{M}}$ ein zu einer festen Wohlordnung W von $\mathfrak{K}$ gehöriges reduziertes Grundideal von $\overline{Q}$, so ist der Restklassenring $\mathsf{B}_\mathfrak{K} = \overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ ein p-adischer perfekter Bewertungsring mit zu $\mathfrak{K}$ isomorphem Restklassenkörper.

Der Quotientenkörper $\mathsf{K}_\mathfrak{K}$ von $\mathsf{B}_\mathfrak{K}$ stellt einen p-adisch bewerteten perfekten Körper dar, dessen Restklassenkörper zu $\mathfrak{K}$ isomorph ist.

Damit ist auch im charakteristikungleichen Fall die Konstruktion des gesuchten Körpers K mit dem vorgegebenen Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ vollendet. Durch die soeben gewonnenen Körper werden aber auch hier bereits wieder sämtliche möglichen Strukturen

---

[15a]) Etwa indem man jeden Koeffizienten von $\mathfrak{G}_\lambda(x) \neq 0$ durch die zugehörige Unbestimmte aus U_λ ersetzt außer dem höchsten e, der durch 1 ersetzt wird.

[16]) Hervorzuheben ist, daß das Ideal $\overline{\mathfrak{M}}$ im allgemeinen keineswegs eindeutig bestimmt ist. Wohl aber sind die Restklassenringe $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ bei verschiedener Wahl des Ideals $\overline{\mathfrak{M}}$ stets isomorph, wie aus unseren weiteren Resultaten hervorgeht (vgl. Satz B_1).

[16a]) $\overline{\mathfrak{M}}$ kann jedoch leider nicht als maximales, p nicht enthaltendes Unterideal von $\overline{\mathfrak{N}}$ definiert werden.

p-adisch bewerteter perfekter Körper erschöpft. Läßt man nämlich $\mathfrak{R}$ alle Körpertypen der Charakteristik p durchlaufen und ordnet jedem solchen $\mathfrak{R}$ einen nach dem obigen Verfahren gewonnenen p-adisch bewerteten perfekten Körper $\mathsf{K}_{\mathfrak{R}}$ mit zu $\mathfrak{R}$ isomorphem Restklassenkörper zu, so besteht analog zu A der Satz:

B_1. *Im charakteristikungleichen Fall* $\chi(\mathsf{K}) = 0$, $\chi(\mathfrak{R}) = p$ *ist jeder diskret bewertete perfekte unverzweigte Körper* K *mit dem Restklassenkörper* $\mathfrak{R}$ *analytisch isomorph zu dem p-adisch bewerteten perfekten Körper* $\mathsf{K}_{\mathfrak{R}}$.

Die p-adisch bewerteten Körper $\mathsf{K}_{\mathfrak{R}}$ stellen also im Falle $\chi(\mathsf{K}) = 0$ $\chi(\mathfrak{R}) = p$ wirklich ein vollständiges Repräsentantensystem für alle möglichen Strukturen diskret bewerteter perfekter unverzweigter Körper dar. Hieraus ergibt sich dann analog zu A′ sofort:

B_1'. *Auch im charakteristikungleichen unverzweigten Fall sind zwei diskret bewertete perfekte Körper dann und nur dann analytisch isomorph, wenn ihre Restklassenkörper isomorph schlechthin sind.*

Auch hier ist also der Typus des Restklassenkörpers eine charakteristische Invariante für die Struktur des Gesamtkörpers.

b_2) Die bisherigen Resultate beziehen sich alle auf den unverzweigten Unterfall; insbesondere verliert Satz B_1' für Körper mit dem Verzweigungsexponenten n im allgemeinen seine Gültigkeit, wie man leicht durch Beispiele bestätigt [17]). Trotzdem läßt sich aber mit diesen Sätzen auch der verzweigte Fall weitgehend beherrschen.

Geht man nämlich von einem p-adisch bewerteten perfekten Körper K_1 mit dem zugehörigen Bewertungsring B_1 und dem Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ zu einem *Eisensteinschen Oberkörper* n-ten Grades über, adjungiert man also zu K_1 eine Nullstelle π einer Eisensteinschen Gleichung

$$\pi^n = p(\alpha_0 + \alpha_1\pi + \cdots + \alpha_{n-1}\pi^{n-1}) \qquad (\alpha_i \text{ aus } \mathsf{B}_1,\ \alpha_0 \not\equiv 0\ (p)),$$

so ist die Erweiterung $\mathsf{K} = \mathsf{K}_1(\pi)$ bei Fortsetzung der ursprünglichen Bewertung ein n-fach verzweigter diskret bewerteter perfekter Körper mit zu $\mathfrak{R}$ *kongruentisomorphem* Restklassenkörper, d. h. es ist der Restklassenkörper von K isomorph zu $\mathfrak{R}$ und zugleich ist ein in K_1 enthaltenes Repräsentantensystem für die Klassen von $\mathfrak{R}$ stets auch ein Repräsentantensystem für die Klassen des Restklassenkörpers von K. Es ist nun von besonderer Bedeutung, daß hiervon auch die Umkehrung richtig ist, nämlich:

B_2. *Im Falle* $\chi(\mathsf{K}) = 0$, $\chi(\mathfrak{R}) = p$ *enthält ein diskret bewerteter perfekter n-fach verzweigter Körper* K *mit dem Restklassenkörper* $\mathfrak{R}$ *stets mindestens einen perfekten unverzweigten Körper* K_1 *mit zu* $\mathfrak{R}$ *kongruentisomorphem Restklassenkörper. Über jedem solchen Unterkörper* K_1 *ist* K *ein Eisensteinscher Oberkörper vom Grade n.*

Daß hier der p-adisch bewertete perfekte Unterkörper K_1 im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist [18]), entspricht der Tatsache, daß im charakteristikgleichen Fall der Koeffizientenbereich des Potenzreihenkörpers ebenfalls nicht eindeutig bestimmt ist.

Zusammen mit B_1 besagt B_2 offenbar: *Im charakteristikungleichen Fall* $\chi(\mathfrak{R}) = 0$, $\chi(\mathfrak{R}) = p$ *ist ein diskret bewerteter perfekter n-fach verzweigter Körper* K *mit dem Restklassenkörper* $\mathfrak{R}$ *stets analytisch isomorph zu einer Eisensteinschen Erweiterung n-ten Grades über dem früher konstruierten p-adisch bewerteten Körper* $\mathsf{K}_{\mathfrak{R}}$.

---

[17]) Ist P_p der Henselsche Körper der p-adischen Zahlen und q eine rationale zu p teilerfremde Zahl, die quadratischer Nichtrest mod. p ist, so sind die Körper $\mathsf{P}_p(\sqrt{p})$ und $\mathsf{P}_p(\sqrt{qp})$ bei Fortsetzung der ursprünglichen Bewertung beide diskret bewertet und perfekt, beide verzweigt mit dem Verzweigungsexponenten 2, und ihre Restklassenkörper sind beide Primkörper von der Charakteristik p. Trotzdem sind $\mathsf{P}_p(\sqrt{p})$ und $\mathsf{P}_p(\sqrt{qp})$ nicht isomorph.

[18]) Der Unterkörper K_1 ist für $n > 1$ dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn $\mathfrak{R}$ absolut algebraisch ist.

Durch dieses Ergebnis wird auch im n-fach verzweigten Fall ein repräsentantenmäßiger Überblick über die möglichen Strukturen der perfekten Körper eröffnet, und zwar treten als Repräsentanten die Eisensteinschen Oberkörper n-ten Grades über den sämtlichen Körpern $K_{\mathfrak{R}}$ auf. Dabei ist jedoch hervorzuheben, daß zwei algebraisch inäquivalente Eisensteinsche Erweiterungen desselben p-adisch bewerteten perfekten Körpers sehr wohl noch analytisch isomorph sein können, d. h. es kann zwischen ihnen ein analytischer Isomorphismus bestehen, bei dem eben die Elemente des gemeinsamen Grundkörpers nicht in sich übergehen. Die angegebenen Repräsentanten besitzen daher selbst bei Beschränkung auf inäquivalente Erweiterungen der einzelnen Körper $K_{\mathfrak{R}}$ keineswegs sämtlich verschiedene Strukturen, oder anders ausgedrückt: Die Menge der aufgestellten Repräsentanten ist zwar vollständig, aber im Gegensatz zu unseren früheren Resultaten noch zu umfangreich. Es ist infolgedessen auch selbstverständlich nicht wie früher möglich, aus ihrer Betrachtung unmittelbar eine invariantenmäßige Lösung des Strukturproblems im verzweigten Falle abzulesen. Wir begnügen uns vielmehr in dieser Hinsicht mit der sofort durch B_2 und B_1' gelieferten Feststellung: *Im charakteristikungleichen Falle* $\chi(K) = 0$, $\chi(\mathfrak{R}) = p$ *ist ein diskret bewerteter perfekter n-fach verzweigter Körper mit dem Restklassenkörper* $\mathfrak{R}$ *stets Eisensteinscher Oberkörper n-ten Grades über einem p-adisch bewerteten perfekten Körper mit demselben Restklassenkörper* $\mathfrak{R}$, *dessen Struktur durch* $\mathfrak{R}$ *allein eindeutig bestimmt ist.*

9. Allgemeiner Begriff des Grundrings. Beim Beweis der soeben zusammengestellten Ergebnisse werden wir den charakteristikgleichen und charakteristikungleichen Fall formal möglichst einheitlich zu behandeln suchen. Zu diesem Zweck führen wir zunächst allgemein die Begriffe des Grundrings, des Grundideals und des reduzierten Grundideals ein, die wir bisher nur im charakteristikungleichen Fall betrachtet haben. Das geschieht folgendermaßen.

Ist Q ein beliebiger Integritätsbereich und $\mathfrak{N}$ ein Primideal von Q, so sagen wir Q sei *abgeschlossen bezüglich* $\mathfrak{N}$, wenn jedes nicht zu $\mathfrak{N}$ gehörige Element von Q eine Einheit ist. Der Restklassenring $Q/\mathfrak{N}$ ist dann stets ein Körper und heiße kurz der *Restklassenkörper von* Q. Wir nennen Q ferner *glatt transzendent bezüglich* $\mathfrak{N}$ und U eine *bezüglich* $\mathfrak{N}$ *glatte Transzendenzbasis* von Q, wenn man aus Q eine Menge U von Unbestimmten herausgreifen kann, die drei Eigenschaften besitzen: Sie sind erstens algebraisch unabhängig in bezug auf den Primintegritätsbereich P von Q, zweitens inkongruent mod. $\mathfrak{N}$, und drittens so beschaffen, daß Q in dem rein transzendenten Körper $P(U)$ liegt. Sei nun Q gleichzeitig bezüglich $\mathfrak{N}$ abgeschlossen und glatt transzendent, e sein Einselement und χ die Charakteristik seines Restklassenkörpers $Q/\mathfrak{N}$. Das Element $\pi = \chi e$ stellt dann stets ein Primelement [19]), das *charakteristische Primelement* von Q dar, und erzeugt eine ganzzahlige Bewertung von $P(U)$ und damit insbesondere von Q [20]). Die vollständige Hülle $\bar{Q}$ von Q hinsichtlich dieser ganzzahligen Bewertung ist bezüglich des Erweiterungsideals $\bar{\mathfrak{N}} = \bar{Q}\mathfrak{N}$ wiederum abgeschlossen und der Restklassenkörper $\bar{Q}/\bar{\mathfrak{N}}$ ist zu $Q/\mathfrak{N}$ kongruentisomorph; $\bar{Q}$ liegt ferner in der vollständigen Hülle des Körpers $P(U)$. Wir bezeichnen $\bar{Q}$ allgemein als einen *Grundring*, $\bar{\mathfrak{N}}$ als das *Grundideal* von $\bar{Q}$ und U als eine *bezüglich* $\bar{\mathfrak{N}}$ *glatte Hüllentranszendenzbasis* von $\bar{Q}$. Bilden die Unbestimmten des Systems U

---

[19]) Unter einem Primelement q eines Integritätsbereichs $\mathfrak{l}$ verstehen wir in dieser Arbeit ein Element, das keine Einheit von $\mathfrak{l}$ und für das der Restklassenring $\mathfrak{l}/q$ ein Integritätsbereich ist. Insbesondere rechnen wir also das Nullelement von $\mathfrak{l}$ zu den Primelementen.

[20]) Das charakteristische Primelement π von Q ist im charakteristikgleichen Fall $\chi(Q) = \chi(Q/\mathfrak{N}) = \chi$ gleich dem Nullelement, die von ihm erzeugte Bewertung folglich die triviale Bewertung. Dagegen ist π im charakteristikungleichen Fall $\chi(Q) = 0$, $\chi(Q/\mathfrak{N}) = p$ gleich $pe \neq 0$ und die von ihm erzeugte Bewertung nichttrivial.

insbesondere ein vollständiges Repräsentantensystem von $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}}$, so sprechen wir von einer *maximal glatten Hüllentranszendenzbasis* U und einem *maximalen Grundring* $\overline{Q}$.

Mit Hilfe des Verfahrens, das wir schon im charakteristikungleichen Falle auseinandersetzten, kann man zu einem vorgegebenen Körper $\mathfrak{k}$ der Charakteristik χ ohne Schwierigkeit einen maximalen Grundring $\overline{Q}$ bilden, dessen Restklassenkörper $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}}$ zu $\mathfrak{k}$ isomorph ist. Dabei kann man die Charakteristik von $\overline{Q}$ noch beliebig so vorschreiben, daß sie durch χ teilbar ist. Legt man ferner in dem Restklassenkörper $\mathfrak{L} = \overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}}$ und damit in der bezüglich $\overline{\mathfrak{R}}$ maximal glatten Hüllentranszendenzbasis U des Grundrings $\overline{Q}$ eine feste Wohlordnung W zugrunde, so kann man im allgemeinenen Fall ganz entsprechend wie früher den Begriff eines *reduzierten Grundideals*

$$\overline{\mathfrak{M}} = \langle G_0(u_0), \ldots G_\lambda(u_\lambda), \ldots \rangle$$

definieren, das zu der durch W wohlgeordneten Basis U gehört. Es gilt dann:

Lemma I. *Für das Grundideal* $\overline{\mathfrak{R}}$ *besteht die Gleichung* $\overline{\mathfrak{R}} = (\overline{\mathfrak{M}}, \pi)$, *wo* π *das charakteristische Primelement von* $\overline{Q}$ *bedeutet. Der Restklassenring* $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ *des Grundrings* $\overline{Q}$ *nach dem reduzierten Grundideal* $\overline{\mathfrak{M}}$ *stellt stets einen vollständigen Bewertungsring dar.*

Dabei ist $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ im charakteristikgleichen Fall $\chi(\overline{Q}) = \chi(\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}})$ ein zu $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}}$ isomorpher Körper, im charakteristikungleichen Fall $\chi(\overline{Q}) = 0$, $\chi(\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}}) = p$ dagegen ein perfekter p-adischer Bewertungsring mit einem zu $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}}$ isomorphen Restklassenkörper.

10. Beweisansatz für die Hauptsätze. Zum Beweis unserer Hauptsätze A, B_1 und B_2 betrachten wir nun einen festen maximalen Grundring $\overline{Q}$ mit dem Grundideal $\overline{\mathfrak{R}}$ und ein festes reduziertes Grundideal $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\overline{Q}$, das der durch W wohlgeordneten maximal glatten Hüllentranszendenzbasis U von $\overline{Q}$ zugehört. Neben $\overline{Q}$ stellen wir einen beliebigen diskret bewerteten perfekten Körper K, dessen Charakteristik mit der Charakteristik von $\overline{Q}$ übereinstimmt und dessen Restklassenkörper $\mathfrak{k} = \mathsf{B}/\mathfrak{p}$ zum Restklassenkörper $\mathfrak{L} = \overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}}$ isomorph ist.

Wir werden zeigen:

Lemma II. *Der Bewertungsring* B *von* K *enthält stets einen Unterring* $\overline{\Omega}$, *der zu dem festen Ring* $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ *isomorph ist. Dabei stellt* $\overline{\Omega}$ *im charakteristikgleichen Fall* $\chi(\mathsf{K}) = \chi(\mathfrak{k})$ *ein relationstreues Repräsentantensystem von* $\mathfrak{k}$, *im charakteristikungleichen Fall* $\chi(\mathsf{K}) = 0$, $\chi(\mathfrak{k}) = p$ *dagegen einen perfekten p-adischen Bewertungsring dar, dessen Restklassenkörper zu* $\mathfrak{k}$ *kongruentisomorph ist.*

Aus diesem Lemma werden sich dann ohne Schwierigkeit die Behauptungen A, B_1 und B_2 ergeben.

Um das Lemma II selbst zu gewinnen, fassen wir einen festen Isomorphismus Θ des Restklassenkörpers $\mathfrak{L}$ von $\overline{Q}$ auf den Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ von K ins Auge und verstehen unter A ein in B enthaltenes vollständiges Repräsentantensystem der Klassen von $\mathfrak{k}$. Da U seinerseits ein vollständiges Repräsentantensystem für die Klassen von $\mathfrak{L}$ ausmacht, so erhält man offenbar eine eindeutig bestimmte Abbildung $U|\mathsf{A}$ von U auf A, wenn man von einem Element u aus U zunächst zu seiner Klasse in $\mathfrak{L}$, von dieser weiter zu ihrer Θ-Bildklasse in $\mathfrak{k}$ und schließlich zum Repräsentanten α dieser Bildklasse in A übergeht. Diese Abbildung $U|\mathsf{A}$ läßt sich, wie wir dartun werden, stets auf eine und nur eine Weise zu einem stetigen Homomorphismus (siehe § 2) des ganzen Grundrings $\overline{Q}$ auf einen Unterring von B fortsetzen. Ist $\overline{\Omega}_1$ der Bildintegritätsbereich, der dabei aus $\overline{Q}$ hervorgeht, so sagen wir kurz, $\overline{\Omega}_1$ sei aus $\overline{Q}$ durch die Abbildung $U|\mathsf{A}$ entstanden. Die Natur des Bildintegritätsbereichs $\overline{\Omega}_1$ ist selbstverständlich noch von der Wahl des Repräsentantensystems A abhängig.

Wir nennen nun das Repräsentantensystem A von $\mathfrak{R}$ ein *Nullstellensystem* des reduzierten Grundideals $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\overline{Q}$, wenn alle Elemente aus $\overline{\mathfrak{M}}$ bei der Abbildung $U|\mathsf{A}$ in die Null übergehen. Die Bedeutung dieses Begriffs liegt in der Tatsache: *Ist das Repräsentantensystem* A *von* $\mathfrak{R}$ *ein Nullstellensystem des Ideals* $\overline{\mathfrak{M}}$, *so hat der Bildintegritätsbereich* $\overline{\Omega}$, *der aus* $\overline{Q}$ *bei der Abbildung* $U|\mathsf{A}$ *entsteht, die in Lemma II angegebenen Eigenschaften.* Es kommt daher im wesentlichen auf den Existenzbeweis für ein Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}$ an.

11. Gedankengang des Existenzbeweises. Bei diesem Existenzbeweis spielen die algebraischen Eigenschaften der Basispolynome $G_\lambda(u_\lambda)$, mit deren Hilfe das Ideal $\overline{\mathfrak{M}}$ erklärt ist, und damit die algebraischen Eigenschaften von $\mathfrak{L}$ gegenüber der Wohlordnung W eine Rolle. Dazu bemerken wir allgemein folgendes: Ist $\mathfrak{k}$ ein beliebiger Unterkörper von $\mathfrak{L}$ und W eine Wohlordnung von $\mathfrak{L}$, so bestehen für ein Element $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{L}$ zunächst zwei Möglichkeiten: $\mathfrak{b}$ ist nämlich entweder algebraisch oder transzendent in bezug auf den Unterkörper $\mathfrak{L}_\mathfrak{b}$, der aus $\mathfrak{k}$ durch Adjunktion aller $\mathfrak{b}$ bei W vorangehenden Elemente von $\mathfrak{L}$ entsteht, und heißt dementsprechend *algebraisch* oder *transzendent bei der Wohlordnung* W *von* $\mathfrak{L}/\mathfrak{k}$. Für die bei W algebraischen Elemente $\mathfrak{b}$ können dann nach Steinitz noch einmal zwei Fälle eintreten. $\mathfrak{b}$ ist entweder Nullstelle eines separablen, d. h. von mehrfachen Nullstellen freien, irreduziblen Polynoms über $\mathfrak{L}_\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b}$ annulliert über $\mathfrak{L}_\mathfrak{b}$ ein inseparables irreduzibles Polynom; kurz: $\mathfrak{b}$ ist *bei der Wohlordnung* W *von* $\mathfrak{L}/\mathfrak{k}$ entweder *separabel* oder *inseparabel.* Eine Wohlordnung W von $\mathfrak{L}/\mathfrak{k}$, bei der jedes algebraische Element zugleich auch separabel ist, werde eine *separierende Wohlordnung von* $\mathfrak{L}/\mathfrak{k}$ genannt. Der Körper $\mathfrak{L}$ heiße ferner *separabel* oder *inseparabel über* $\mathfrak{k}$, je nachdem er mindestens eine oder überhaupt keine separierende Wohlordnung über $\mathfrak{k}$ besitzt [21]). Dabei wird der Bezugskörper $\mathfrak{k}$ im folgenden durchgehends mit dem Primkörper übereinstimmen. In diesem Falle wollen wir ihn der Kürze halber weglassen, werden also einfach von einem separablen oder inseparablen Körper $\mathfrak{L}$ sprechen.

Ist nun zunächst der Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ des festen Grundrings $\overline{Q}$ in diesem Sinne separabel, so denken wir uns die feste Wohlordnung W von $\mathfrak{L}$ als separierende Wohlordnung gewählt. Die Existenz eines Nullstellensystems A von $\overline{\mathfrak{M}}$ kann dann mit bekannten Henselschen Methoden geführt werden. Das ist im charakteristikgleichen Fall zuerst von dem Älteren von uns [Hasse], daran anschließend allgemein von dem Jüngeren [Schmidt] erkannt worden, wobei sich überdies die Möglichkeit ergab, die diskrete Bewertung von K durch eine beliebige Exponentenbewertung zu ersetzen, hinsichtlich der K nur perfekt sein muß.

Wesentlich schwieriger gestalten sich die Verhältnisse dagegen, wenn der Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ von $\overline{Q}$ inseparabel ist. Liegt dann in K eine nichtdiskrete Exponentenbewertung zugrunde, hinsichtlich der K perfekt ist, so braucht in K das Lemma II überhaupt nicht zu gelten, wie der Jüngere von uns in einer anschließenden Note durch ein Beispiel zeigen wird. Um im Falle einer diskreten Bewertung von K trotzdem zum Ziele zu gelangen, müssen daher neue, speziell auf die diskrete Bewertung zugeschnittene Methoden ausgebildet werden.

Das Verfahren, das zu diesem Zwecke in der vorliegenden Arbeit entwickelt wird, beruht auf dem folgenden einfachen Gedanken [22]). Ein inseparabler Körper gestattet nach Definition keine separierende Wohlordnung. Um trotzdem die inseparablen algebraischen Erweiterungen zu vermeiden, denke man sich die Elemente eines solchen Körpers $\mathfrak{L}$ allgemeiner bloß geordnet. Ist dann O eine feste Ordnung von $\mathfrak{L}$, so bestehen

[21]) Einfache Beispiele inseparabler Körper stellen etwa die nicht absolut algebraischen, vollkommenen Körper der Charakteristik p dar.

[22]) Zu dem folgenden vgl. F. K. Schmidt, Über inseparable Körper, erscheint demnächst im J. reine angew. Math.

für ein beliebiges Element $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{L}$ wieder drei Möglichkeiten: $\mathfrak{b}$ ist entweder transzendent oder separabel algebraisch oder inseparabel algebraisch in bezug auf den Unterkörper, der aus allen ihm bei O vorangehenden Elementen von $\mathfrak{L}$ abgeleitet ist, und wird dementsprechend *transzendent* oder *separabel algebraisch* oder *inseparabel algebraisch bei der Ordnung O* genannt. Eine Ordnung O, bei der kein einziges inseparables algebraisches Element vorkommt, heiße kurz eine *separierende Ordnung* von $\mathfrak{L}$.

Entscheidend ist nun die Tatsache, daß ein beliebiger inseparabler Körper $\mathfrak{L}$ stets mindestens eine *separierende Ordnung O* gestattet. Das ist im Spezialfall eines vollkommenen Körpers besonders leicht einzusehen. Ist nämlich $\mathfrak{S}$ eine Transzendenzbasis des vollkommenen Körpers $\mathfrak{L}$ über seinem Primkörper $\mathfrak{P}$, so verstehen wir unter $\mathfrak{L}^{(n)}$ den Körper aller Elemente aus $\mathfrak{L}$, deren p^n-te Potenz über $\mathfrak{P}(\mathfrak{S})$ separabel algebraisch ist, und betrachten den Steinitzschen Körperturm $\mathfrak{L}^{(0)} \subseteq \mathfrak{L}^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{L}^{(n)} \subseteq \cdots$. Das System $\mathfrak{S}^{p^{-n}}$ aller p^{-n}-ten Potenzen von Elementen aus $\mathfrak{S}$ liegt dann sicher in dem Komplement $\mathfrak{C}^{(n)} = \mathfrak{L}^{(n)} - \mathfrak{L}^{(n-1)}$, und es ist $\mathfrak{L}^{(n)}$ separabel algebraisch über $\mathfrak{P}(\mathfrak{S}^{p^{-n}})$. Denkt man sich daher jedes $\mathfrak{C}^{(n)}$ so wohlgeordnet, daß das System $\mathfrak{S}^{p^{-n}}$ am Anfang steht, und ordnet dann die $\mathfrak{C}^{(n)}$ in der Reihenfolge $\ldots, \mathfrak{C}^{(n)}, \mathfrak{C}^{(n-1)}, \ldots, \mathfrak{C}^{(1)}, \mathfrak{C}^{(0)} = \mathfrak{L}^{(0)}$ an, so erhält man eine Ordnung O von $\mathfrak{L}$, die in jedem $\mathfrak{L}^{(n)} = \mathfrak{C}^{(n)} + \cdots + \mathfrak{C}^{(0)}$ eine separierende Wohlordnung induziert und bei der $\mathfrak{C}^{(n)}$ jeweils dem $\mathfrak{C}^{(n-1)}$ vorangeht. O stellt mithin tatsächlich eine separierende Ordnung von $\mathfrak{L}$ dar, die überdies dem Körperturm der $\mathfrak{L}^{(n)}$ noch besonders angepaßt ist.

Das Konstruktionsverfahren, durch das wir soeben für einen vollkommenen Körper eine separierende Ordnung O gefunden haben, läßt sich aber mit gewissen Abänderungen auch auf beliebige inseparable Körper übertragen. Aus einem beliebigen inseparablen Körper $\mathfrak{L}$ läßt sich nämlich stets eine separabler Unterkörper $\mathfrak{L}'$ so herausgreifen, daß $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{L}'$ *relativ vollkommen* ist in folgendem Sinn: Bedeutet $\tilde{\mathfrak{L}}'$ die vollkommene Hülle von $\mathfrak{L}'$, so ist der Vereinigungskörper $\tilde{\mathfrak{L}}'\mathfrak{L}$ vollkommen, d. h. $\mathfrak{L}$ wird durch Vervollkommnung des Unterkörpers $\mathfrak{L}'$ bereits selbst vollkommen. Über einem Unterkörper $\mathfrak{L}'$ dieser Art, besitzt der Körper $\mathfrak{L}$ ganz entsprechende Eigenschaften wie ein absolut vollkommener Körper. Insbesondere gilt: Ist $\mathfrak{S}$ eine Transzendenzbasis von $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}'$ und $\mathfrak{L}^{(n)}$ der Körper aller Elemente aus $\mathfrak{L}$, deren p^n-te Potenz separabel algebraisch über $\mathfrak{L}'(\mathfrak{S})$ ist, so betrachte man den Steinitzschen Körperturm

$$\text{(S)} \qquad \mathfrak{L}^{(0)} \subseteq \mathfrak{L}^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{L}^{(n)} \subseteq \cdots \quad (\mathfrak{L} = \text{Vereinigungsmenge der } \mathfrak{L}^{(n)}).$$

$\mathfrak{L}$ besitzt dann stets eine separierende Ordnung O mit den nachstehenden Eigenschaften:

1. O induziert in jedem $\mathfrak{L}^{(n)}$ eine separierende Wohlordnung $W^{(n)}$.

2. Denkt man sich die Elemente von $\mathfrak{L}$ in der durch O angegebenen Reihenfolge hingeschrieben, so erhält man eine Summendarstellung

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' + \sum_{n=\infty}^{0} \mathfrak{C}^{(n)} \qquad (\mathfrak{C}^{(n)} = \mathfrak{L}^{(n)} - \mathfrak{L}^{(n-1)},\ \mathfrak{C}^{(0)} = \mathfrak{L}^{(0)} - \mathfrak{L}');$$

d. h. die Elemente von $\mathfrak{L}'$ gehen allen übrigen und die des Komplements $\mathfrak{C}^{(n)}$ jeweils dem Komplement $\mathfrak{C}^{(n-1)}$ voran.

Eine solche Ordnung O nennen wir eine *zu dem Körperturm* (S) *gehörige separierende Ordnung*. Wir denken sie uns für den Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ von $\bar{Q}$ festgewählt und benutzen sie an Stelle der früher auftretenden Wohlordnung W.

Dem Aufbau von $\mathfrak{L}$ mit Hilfe des Körperturms (S) entspricht, wie wir zeigen werden, ein Aufbau des Grundrings $\bar{Q}$ mit Hilfe einer aufsteigenden Folge maximaler Grundringe $\bar{Q}^{(n)}$, wobei der Restklassenkörper von $\bar{Q}^{(n)}$ zu $\mathfrak{L}^{(n)}$ kongruentisomorph ist und daher kurz mit $\mathfrak{L}^{(n)}$ bezeichnet werden kann,

$$\bar{Q}^{(0)} \subseteq \bar{Q}^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq \bar{Q}^{(n)} \subseteq \cdots \quad (\bar{Q} = \text{vollst. Hülle d. Verein. der } \bar{Q}^{(n)}).$$

In dem Grundring $\overline{Q}^{(n)}$ bestimmen wir jeweils nach dem früher beschriebenen Verfahren ein reduziertes Urbildideal $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$, das zu der separierenden Wohlordnung $W^{(n)}$ seines Restklassenkörpers $\mathfrak{L}^{(n)}$ gehört. Da die separierenden Wohlordnungen $W^{(n)}$ der Körper $\mathfrak{L}^{(n)}$ alle durch dieselbe Ordnung O erzeugt werden und da jedes $\overline{Q}^{(n)}$ als Grundring bezüglich seiner Bewertung vollständig ist, kann man es insbesondere so einrichten, daß auch die Ideale $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ einander umfassen,

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(0)} \leqq \overline{\mathfrak{M}}^{(1)} \leqq \cdots \leqq \overline{\mathfrak{M}}^{(n)} \leqq \cdots .$$

Die in dem bewerteten Gesamtring $\overline{Q}$ gebildete abgeschlossene Hülle der Vereinigungsmenge dieser $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ ist dann ein Ideal $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}_O$ von $\overline{Q}$ und hat die in Lemma I angegebenen Eigenschaften. Wir nennen $\overline{\mathfrak{M}}_O$ ein *zu der Ordnung O* von $\mathfrak{L}$ *gehöriges reduziertes Grundideal* von $\overline{Q}$ und arbeiten jetzt mit diesem festen $\overline{\mathfrak{M}}_O$ an Stelle des früher benutzten, zu der Wohlordnung W gehörigen reduzierten Grundideals $\overline{\mathfrak{M}}$.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich nun der Beweis des Lemmas II auch im Fall eines inseparablen Körpers $\mathfrak{L}$ erbringen. Wir setzen also in diesem Lemma $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}_O$ und werden zeigen, daß in dem Bewertungsring des diskret bewerteten perfekten Körpers K stets ein Repräsentantensystem existiert, das Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}_O$ ist. Zu diesem Zweck bedenken wir: Der Isomorphismus Θ von $\mathfrak{L}$ auf den Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von K bildet die erzeugende Körperfolge $\mathfrak{L}^{(n)}$ von $\mathfrak{L}$ auf eine erzeugende Körperfolge $\mathfrak{K}^{(n)}$ von $\mathfrak{K}$ ab. Da das reduzierte Grundideal $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ jeweils zu der separierenden Wohlordnung $W^{(n)}$ von $\mathfrak{L}^{(n)}$ gehört, kann man mit Henselschen Methoden jeweils ein Repräsentantensystem $\mathsf{A}^{(n)}$ für die Klassen von $\mathfrak{K}^{(n)}$ finden, das Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ ist. Man erhält auf diese Weise eine Folge von Repräsentantensystemen

$$\mathsf{A}^{(0)}, \mathsf{A}^{(1)}, \ldots, \mathsf{A}^{(n)}, \ldots$$

für die aufsteigende Folge von Körpern $\mathfrak{K}^{(n)}$, die zugleich Nullstellensysteme für die aufsteigende Folge von Idealen $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ sind.

Eine beliebige Klasse $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{K}$ besitzt offenbar von einem gewissen Index r an in jedem $\mathsf{A}^{(n)}$ einen Repräsentanten. Die Repräsentanten einer festen Klasse $\mathfrak{a}$ in den verschiedenen $\mathsf{A}^{(n)}$ sind aber im allgemeinen keineswegs gleich, d. h. die Systeme $\mathsf{A}^{(n)}$ bilden selbst keine aufsteigende Folge. Es läßt sich daher auch nicht etwa aus ihrer Vereinigungsmenge ein Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}_O$ gewinnen.

Um ein solches Nullstellensystem zu erhalten, hat man vielmehr die Repräsentantenfolge

$$\alpha^{(r)}, \alpha^{(r+1)}, \ldots, \alpha^{(n)}, \ldots$$

näher zu untersuchen, die einer festen Klasse $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{K}$ vermittels der Folge der $\mathsf{A}^{(n)}$ zugeordnet ist. Durch Ausnützung der Eigenschaften der Ordnung O läßt sich nämlich zeigen, daß jede solche Repräsentantenfolge in dem diskret bewerteten perfekten Körper K konvergiert. Das System der Grenzelemente aller Repräsentantenfolgen stellt dann gerade ein Repräsentantensystem von $\mathfrak{K}$ dar, das zugleich Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}$ ist. Damit ist der Beweis des Lemmas II auch im Fall eines inseparablen Körpers $\mathfrak{L}$ durchgeführt.

Das soeben geschilderte Verfahren, das von dem Jüngeren von uns stammt, wird vermutlich auch bei anderen Fragen, bei denen ähnliche Verhältnisse vorliegen, gute Dienste leisten.

Die Gliederung der Arbeit und die Verteilung der verschiedenen Beweisschritte auf die einzelnen Paragraphen ergibt sich unmittelbar aus der nachstehenden Inhaltsübersicht. Hervorzuheben ist nur noch, daß als methodisches Hilfsmittel besonders häufig der Begriff des stetigen Homomorphismus bewerteter Integritätsbereiche und die stetige Fortsetzung eines stetigen Homomorphismus verwandt werden, deren wesentlichen Eigenschaften u. a. in § 2 hergeleitet werden.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 4

Abschnitt I. Vorbereitungen.

§ 1. Zur Theorie der Homomorphismen von Ringen und Integritätsbereichen 18
§ 2. Zur Theorie der Exponentenbewertung 23
§ 3. Zur Theorie der diskreten Bewertung 31

Abschnitt II. Grundring und reduziertes Grundideal.

§ 4. Einführung von Grundring und reduziertem Grundideal 35
§ 5. Hilfssätze zum Beweis von Satz 5 38
§ 6. Beweis von Satz 5. Folgerungen 41
§ 7. Ergänzungen für Grundringe mit inseparablem Restklassenkörper 45

Abschnitt III. Beweis der Hauptsätze.

§ 8. Der Begriff des Nullstellensystems für das reduzierte Grundideal $\overline{\mathfrak{M}}$ eines festen Grundrings $\bar{Q}$ 50
§ 9. Existenzbeweis für ein Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}$ im Falle eines Grundrings $\bar{Q}$ mit separablem Restklassenkörper 54
§ 10. Existenzbeweis für ein Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}$ im Falle eines Grundrings $\bar{Q}$ mit inseparablem Restklassenkörper 56
§ 11. Beendigung der Beweise 62

Abschnitt I. Vorbereitungen.

§ 1. Zur Theorie der Homomorphismen von Ringen und Integritätsbereichen.

Um die späteren Überlegungen nicht unterbrechen zu müssen, lassen wir den eigentlichen Beweisen der Hauptsätze zunächst die wichtigsten Definitionen und eine Zusammenstellung einfacher vorbereitender Sätze vorausgehen. In diesem ersten Paragraphen soll kurz auf einige ringtheoretische Tatsachen hingewiesen werden, die beiden folgenden werden die Grundlagen der Bewertungstheorie behandeln.

1. Kongruenzhomomorphismus. Sind $R \subseteqq R^*$ zwei Ringe und $\mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{m}^*$ zwei Ideale dieser Ringe, so ziehen die für Elemente a, b, c von R gültigen Kongruenzen

$$a + b \equiv c \text{ bzw. } a \cdot b \equiv c \text{ mod. } \mathfrak{m}$$

offenbar die Kongruenzen

$$a + b \equiv c \text{ bzw. } a \cdot b \equiv c \text{ mod. } \mathfrak{m}^*$$

nach sich. Ordnet man daher der durch das Element a von R mod. $\mathfrak{m}$ bestimmten Klasse $\tilde{a}$ die durch dasselbe a mod. $\mathfrak{m}^*$ bestimmte Erweiterungsklasse $\tilde{a}^*$ zu, so erhält man einen Homomorphismus des Restklassenrings $\widetilde{R} = R/\mathfrak{m}$ auf den Unterring $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ seiner Erweiterungsklassen in $\widetilde{R}^* = R^*/\mathfrak{m}^*$. Diesen Homomorphismus bezeichnen wir als *Kongruenzhomomorphismus* und nennen $\widetilde{R}$ und $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ *kongruenthomomorph.*

Dabei sind nun eine Reihe von Sonderfällen hervorzuheben.

α) Im allgemeinen ist $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ ein echter Unterring von $\widetilde{R}^*$; doch kann $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ auch gleich $\widetilde{R}^*$ werden. Das ist sicher der Fall, wenn $R = R^*$ ist. Man bekommt dann für zwei Ideale $\mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{m}^*$ von R^* den Kongruenzhomomorphismus von $R^*/\mathfrak{m}$ auf $R^*/\mathfrak{m}^*$.

β) Setzt man das Ideal $\mathfrak{m}$ des Unterrings R von R^* gleich dem Nullideal, $\mathfrak{m} = (0)$, so ist für jedes Ideal $\mathfrak{m}^*$ von R^* die Voraussetzung $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{m}^*$ erfüllt. Andererseits stimmt dann aber der Restklassenring $\widetilde{R} = R/\mathfrak{m}$ mit dem Ring R selbst überein, d. h. ein Unterring R von R^* ist stets zu einem Unterring $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ von $R^*/\mathfrak{m}^*$ kongruenthomomorph. Speziell: R^* ist zu $R^*/\mathfrak{m}^*$ kongruenthomomorph; dieser Kongruenzhomomorphismus heiße auch kurz der $\mathfrak{m}^*$-*Kongruenzhomomorphismus* von R^*.

γ) Von besonderer Bedeutung ist der Fall, daß der Kongruenzhomomorphismus des Restklassenrings $\widetilde{R} = R/\mathfrak{m}$ auf den Unterring $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ von $R^*/\mathfrak{m}^*$ ein Isomorphismus ist. Wir sprechen dann von einem *Kongruenzisomorphismus* und nennen $\widetilde{R}$ und $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ *kongruentisomorph.* In diesem Fall identifizieren wir jede Klasse aus $\widetilde{R}$ mit ihrer Erweiterungsklasse in $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$, so daß also $\widetilde{R} = \widetilde{\mathfrak{U}}^*$ wird und sagen, $\widetilde{R}^*$ *umfasse* $\widetilde{R}$ als Unterring. Nehmen wir dabei wieder speziell $\mathfrak{m} = (0)$ an, so ist der Ring R selbst zu dem Ring $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ kongruentisomorph, d. h. man erhält einen Isomorphismus von R auf $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$, wenn man jedem Element aus R die von ihm bestimmte Klasse aus $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ zuordnet. Die Elemente von R bilden dann ein Repräsentantensystem für die Klassen von $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$, und zwar bezeichnen wir R als *relationstreues Repräsentantensystem* von $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$.

Für den Kongruenzisomorphismus zwischen $\widetilde{R}$ und $\widetilde{\mathfrak{U}}^*$ ist notwendig und hinreichend, daß die Nullklasse aus $\widetilde{R}^* = R^*/\mathfrak{m}^*$ keine Klasse von $\widetilde{R} = R/\mathfrak{m}$ außer der Nullklasse enthält, d. h. daß $\mathfrak{m}^* \frown R = \mathfrak{m}$ ist. Sind $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^*$ beide Hauptideale mit derselben Basis b aus R, so kann man diese Bedingung auch so formulieren: Ein Element aus R darf nur dann in R^* durch b teilbar sein, wenn es bereits in R durch b teilbar ist.

Man erkennt unmittelbar: *Besteht erstens für die Ideale* $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{m}^*$ *der Ringe* $R \leqq R^*$ *die Beziehung* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^* \frown R$ *und ist zweitens* R *zu dem ganzen Restklassenring* $R^*/\mathfrak{m}^*$ *kongruenthomomorph, so ist* $R/\mathfrak{m}$ *zu dem ganzen Restklassenring* $R^*/\mathfrak{m}^*$ *kongruentisomorph.*

2. Iterierte Restklassenringe. Im Ring R bilden wir die Restklassen nach einem Ideal $\mathfrak{m}_1$. Die durch das Element a erzeugte Klasse mod. $\mathfrak{m}_1$ bezeichnen wir mit $\tilde{a}^{(1)}$ und nennen sie die durch a bestimmte Klasse erster Stufe zur Unterscheidung von den nachher auftretenden Klassen höherer Stufe.

Jede Klasse erster Stufe ist Element des Rings $\widetilde{R}^{(1)} = R/\mathfrak{m}_1$. Aus $\widetilde{R}^{(1)}$ greifen wir ein Ideal $\widetilde{\mathfrak{m}}_2^{(1)}$ heraus und betrachten $\widetilde{R}^{(1)}$ mod. $\widetilde{\mathfrak{m}}_2^{(1)}$. Alle zu einer festen Klasse erster Stufe $\tilde{a}^{(1)}$ mod. $\widetilde{\mathfrak{m}}_2^{(1)}$ kongruenten Klassen erster Stufe vereinigen wir zu der durch a bestimmten Klasse zweiter Stufe $\tilde{a}^{(2)}$ und sagen ein Element von R liege in $\tilde{a}^{(2)}$, wenn es in einer der zu $\tilde{a}^{(2)}$ gehörigen Klassen erster Stufe liegt. Eine Klasse zweiter Stufe wird dann offenbar durch jedes in ihr liegende Element von R bestimmt.

Der Prozeß der Restklassenbildung läßt sich nun noch einmal wiederholen. Den Ring $\widetilde{R}^{(2)} = \widetilde{R}^{(1)}/\widetilde{\mathfrak{m}}_2^{(1)}$ der Klassen zweiter Stufe betrachten wir mod. einem Ideal $\widetilde{\mathfrak{m}}_3^{(2)}$ von $\widetilde{R}^{(2)}$ und bezeichnen die Gesamtheit aller zu $\tilde{a}^{(2)}$ mod. $\widetilde{\mathfrak{m}}_3^{(2)}$ kongruenten Klassen zweiter Stufe als die durch a bestimmte Klasse dritter Stufe $\tilde{a}^{(3)}$. Die Menge der in $\tilde{a}^{(3)}$ liegenden Elemente von R wird dann wieder durch Rekursion auf die zu $\tilde{a}^{(3)}$ gehörigen Klassen niedrigerer Stufe definiert u. s. f.

Die sukzessiven Restklassenbildungen, die zu den iterierten Restklassenringen $\widetilde{R}^{(i)}$ führen, können bekanntlich nach dem Isomorphiesatz von E. Noether durch eine simultane Restklassenbildung in R ersetzt werden. Genauer:

Ist $\mathfrak{m}_i$ *die Menge aller Elemente aus* R, *die in der Nullklasse i-ter Stufe des Ringes* $\widetilde{R}^{(i)}$ *liegen, so ist* $\mathfrak{m}_i$ *ein Ideal von* R. *Die durch* a *bestimmte Klasse i-ter Stufe* $\tilde{a}^{(i)}$ *umfaßt*

alle und nur die Elemente von R, die in der durch dasselbe a mod.$\mathfrak{m}_i$ erzeugten Restklasse vorkommen, und man erhält einen Isomorphismus, den Kongruenzisomorphismus von $\tilde{R}^{(i)}$ auf $R/\mathfrak{m}_i$, wenn man $\tilde{a}^{(i)}$ die durch a erzeugte Klasse mod.$\mathfrak{m}_i$ zuordnet.

Allgemeiner gilt:

Ist $\mathfrak{n}$ ein Ideal $\geqq \mathfrak{m}_i$ aus R, so erhält man einen Homomorphismus, den Kongruenzhomomorphismus von $\tilde{R}^{(i)}$ auf $R/\mathfrak{n}$, wenn man $\tilde{a}^{(i)}$ die durch a erzeugte Klasse mod. $\mathfrak{n}$ zuordnet, und dieser Kongruenzhomomorphismus ist nur dann ein Isomorphismus, wenn $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_i$ ist.

Sind die Ideale $\tilde{\mathfrak{m}}_2^{(1)}$, $\tilde{\mathfrak{m}}_3^{(2)}, \ldots$ insbesondere Hauptideale $(\tilde{b}_2^{(1)})$, $(\tilde{b}_3^{(2)}), \ldots$, so ist das Ideal $\mathfrak{m}_i$ gleich dem aus $(\mathfrak{m}_1, b_2, b_3, \ldots, b_i)$ in R abgeleiteten Ideal. Der soeben angeführte Isomorphiesatz gibt dann die Möglichkeit, die simultane Restklassenbildung mod. $(\mathfrak{m}_1, b_2, \ldots, b_i)$ in die sukzessive Restklassenbildung

$$\tilde{R}^{(2)} = \tilde{R}^{(1)}/\tilde{b}_2^{(1)}, \ldots, \tilde{R}^{(i)} = \tilde{R}^{(i-1)}/\tilde{b}_i^{(i-1)}$$

aufzuspalten, und gerade hiervon werden wir später Gebrauch machen.

3. Fortsetzung von Abbildungen. Die Menge U mit den Elementen u sei durch eine eindeutige Abbildung φ auf die Menge $\mathfrak{A}$ mit den Elementen $\mathfrak{a}$ bezogen, $\varphi(u) = \mathfrak{a}$; U^* und $\mathfrak{A}^*$ seien Obermengen von U und $\mathfrak{A}$. Die Abbildung φ^* von U^* auf $\mathfrak{A}^*$ heißt *Fortsetzung* von φ in U^*, wenn für ein beliebiges u aus U stets $\varphi^*(u) = \varphi(u)$ ist.

Unter U verstehen wir jetzt eine Menge unabhängiger Unbestimmter in bezug auf den Primintegritätsbereich P mit dem Einselement e, unter $\mathfrak{A}$ eine Menge, die einem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ mit dem Primintegritätsbereich $\mathfrak{P}$ und dem Einselement $\mathfrak{e}$ entnommen ist, wobei die Charakteristik $\chi(P)$ durch $\chi(\mathfrak{P})$ teilbar sei. Jedes Element aus $P[U]$ ist dann auf eine und nur eine Weise darstellbar in der Form

$$\sum_{k_1 \ldots k_r} m_{k_1 \ldots k_r}\, e\, u_1^{k_1} \cdots u_r^{k_r},$$

wo $u_1, \ldots, u_r$ irgend r Unbestimmte aus U bedeuten, die $m_{k_1 \ldots k_r}\, e$ beliebige Elemente aus P und die $k_1, \ldots, k_r$ ganze Zahlen $\geqq 0$ sind, und die Summation nur über endlich viele von $(0, \ldots, 0)$ verschiedene Kombinationen $(k_1, \ldots, k_r)$ erstreckt wird. Jedes Element von $\mathfrak{P}[\mathfrak{A}]$ ist von der Gestalt

$$\sum_{k_1 \ldots k_r} m_{k_1 \ldots k_r}\, \mathfrak{e}\, \mathfrak{a}_1^{k_1} \cdots \mathfrak{a}_r^{k_r},$$

wo die $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ irgend r Elemente aus $\mathfrak{A}$ bezeichnen.

Man zeigt leicht:

Die eindeutige Abbildung φ von U auf $\mathfrak{A}$ läßt sich auf eine und nur eine Weise zu einem Homomorphismus Φ' des Polynomrings $P[U]$ auf den Integritätsbereich $\mathfrak{P}[\mathfrak{A}]$ fortsetzen. Dabei ist

$$(1) \qquad \Phi'\Big(\sum_{k_1 \ldots k_r} m_{k_1 \ldots k_r}\, e\, u_1^{k_1} \cdots u_r^{k_r}\Big) = \sum_{k_1 \ldots k_r} m_{k_1 \ldots k_r}\, \mathfrak{e}\, \mathfrak{a}_1^{k_1} \cdots \mathfrak{a}_r^{k_r}.$$

Bei jedem Homomorphismus von $P[U]$ auf $\mathfrak{P}[\mathfrak{A}]$ geht nämlich das Einselement e von P notwendig in das Einselement $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{P}$ über. Hieraus und aus der Forderung, daß der Homomorphismus Φ' Fortsetzung von φ sein soll, erhält man zwangsläufig die Zuordnung (1). Diese Zuordnung stellt umgekehrt wirklich einen Homomorphismus von $P[U]$ auf $\mathfrak{P}[\mathfrak{A}]$ und eine Fortsetzung von φ dar; man beachte dazu insbesondere die Voraussetzung, daß $\chi(\mathfrak{P})$ Teiler von $\chi(P)$ ist.

Wir betrachten weiter allgemein Fortsetzungen eines Homomorphismus Φ', der den Integritätsbereich J auf den Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ abbildet. $\mathfrak{n}$ bezeichne dabei das Ideal aller Elemente aus J, die durch Φ' in die Null übergehen; $\mathfrak{n}$ ist offenbar Primideal.

Zunächst: In die Polynombereiche $J[x]$ und $\mathfrak{J}[x]$ setzen wir Φ' stets dadurch fort, daß wir einem Polynom $G(x)$ aus $J[x]$ dasjenige Polynom $\mathfrak{G}(x)$ aus $\mathfrak{J}[x]$ zuordnen, das

aus $G(x)$ bei Ersetzung seiner Koeffizienten durch ihre Φ'-Bilder entsteht. $\mathfrak{G}(x)$ nennen wir kurz das Φ'-Bild von $G(x)$, umgekehrt $G(x)$ ein Φ'-Urbild von $\mathfrak{G}(x)$.

Sei ferner Q ein Quotientenring von J, der aus J entsteht, indem man alle Elemente eines multiplikativ abgeschlossenen Systems S in die Nenner nimmt, $Q = \frac{J}{S}$. Jedes Element aus Q ist dann von der Form $\frac{d}{s}$ mit d aus J, s aus S. Das Bildsystem $\Phi'(S) = \mathfrak{S}$ enthalte die Null nicht. Es gilt:

Der Homomorphismus Φ' von J auf $\mathfrak{J}$ läßt sich auf eine und nur eine Weise zu einem Homomorphismus Φ des Quotientenrings Q fortsetzen. Dabei ist

$$\Phi\left(\frac{d}{s}\right) = \frac{\Phi'(d)}{\Phi'(s)}$$

Diese Fortsetzung Φ bildet $Q = \frac{J}{S}$ homomorph auf den Quotientenring $\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{S}}$ von $\mathfrak{J}$ ab. Das Ideal $\mathfrak{N}$ aller Elemente aus Q, die bei Φ in die Null übergehen, ist gleich dem Erweiterungsideal von $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{N} = Q\mathfrak{n}$, folglich $Q/Q\mathfrak{n} \cong \mathfrak{Q}$.

Ist nämlich Φ ein Homomorphismus von Q und Fortsetzung von Φ', so ist notwendig

$$\Phi\left(\frac{d}{s}\right) = \frac{\Phi(d)}{\Phi(s)} = \frac{\Phi'(d)}{\Phi'(s)},$$

also Φ durch Φ' völlig bestimmt. Dabei wird $\frac{J}{S}$ augenscheinlich auf $\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{S}}$ abgebildet, und es ist $\mathfrak{N} = Q\mathfrak{n}$. Umgekehrt stellt die Zuordnung $\Phi\left(\frac{d}{s}\right) = \frac{\Phi'(d)}{\Phi'(s)}$ wirklich einen Homomorphismus von Q und Fortsetzung von Φ' dar.

Aus dem soeben Bewiesenen ergibt sich insbesondere, daß ein Isomorphismus zwischen zwei Integritätsbereichen stets auf eine und nur eine Weise zu einem Isomorphismus zwischen ihren Quotientenkörpern fortgesetzt werden kann.

Wir erwähnen schließlich noch die folgende Tatsache, die sich allgemein auf die Fortsetzung eines Kongruenzhomomorphismus bezieht. Dabei sei $\mathfrak{M}$ ein Primideal des Integritätsbereichs I, H der Kongruenzhomomorphismus von I auf $\mathsf{I}/\mathfrak{M} = \mathfrak{J}$ und I^* bzw. $\mathfrak{J}^*$ ein Oberintegritätsbereich von I bzw. $\mathfrak{J}$.

Ist dann H^* ein Homomorphismus von I^* auf $\mathfrak{J}^*$, der eine Fortsetzung des Kongruenzhomomorphismus H darstellt und $\mathfrak{M}^*$ das Ideal aller Elemente aus I^*, die durch H^* auf die Null abgebildet werden, so ist $\mathfrak{M}^* \cap \mathsf{I} = \mathfrak{M}$. $\mathsf{I}^*/\mathfrak{M}^*$ umfaßt daher $\mathsf{I}/\mathfrak{M} = \mathfrak{J}$.

Es existiert stets ein Isomorphismus von $\mathsf{I}^*/\mathfrak{M}^*$ auf $\mathfrak{J}^*$, der jede Klasse des gemeinsamen Teilintegritätsbereichs $\mathsf{I}/\mathfrak{M} = \mathfrak{J}$ fest läßt, d. h. $\mathsf{I}^*/\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{J}^*$ können als äquivalente Erweiterungen von $\mathsf{I}/\mathfrak{M} = \mathfrak{J}$ aufgefaßt werden.

Da nämlich H^* Fortsetzung von H ist, werden alle und nur die durch H in die Null übergeführten Elemente von I auch durch H^* auf die Null abgebildet, d. h. es ist $\mathfrak{M}^* \frown \mathsf{I} = \mathfrak{M}$. Ordnet man daher jeder Klasse von $\mathsf{I}^*/\mathfrak{M}^*$ dasjenige Element von $\mathfrak{J}^*$ zu, in das die Elemente jener Klasse bei dem Homomorphismus H^* übergehen, so erhält man einen Isomorphismus von $\mathsf{I}^*/\mathfrak{M}^*$ auf $\mathfrak{J}^*$, der die Klassen des gemeinsamen Teilintegritätsbereichs $\mathsf{I}/\mathfrak{M} = \mathfrak{J}$ einzeln fest läßt.

4. **Bezüglich $\mathfrak{N}$ abgeschlossene und glatt transzendente Integritätsbereiche.** Der Integritätsbereich Q heiße, wie schon in der Einleitung angegeben, *bezüglich eines* vom Einheitsideal verschiedenen *Ideals $\mathfrak{N}$ abgeschlossen*, wenn jedes nicht in $\mathfrak{N}$ enthaltene Element Einheit von Q ist. $\mathfrak{N}$ besteht offenbar aus allen Nichteinheiten

von Q und ist Primideal [23]). Der Restklassenring $Q/\mathfrak{R}$ ist ein Körper, der zu Q gehörige *Restklassenkörper.* Geht man von einem Integritätsbereich J mit dem Primideal $\mathfrak{n}$ zu dem Quotientenring $Q = \frac{J}{S}$ über, wo S das System aller durch $\mathfrak{n}$ unteilbaren Elemente von J darstellt, so ist Q augenscheinlich abgeschlossen bezüglich des Erweiterungsideals $\mathfrak{R} = Q\mathfrak{n}$.

Ein beliebiger Integritätsbereich Q mit dem Primintegritätsbereich P wird bekanntlich *rein transzendent* genannt, wenn man aus Q ein System U unabhängiger Unbestimmter in bezug auf P so herausgreifen kann, daß Q in dem Quotientenkörper von $P[U]$ enthalten ist; das System U bezeichnet man als eine *reine Transzendenzbasis* von Q.

Der Integritätsbereich Q mit der reinen Transzendenzbasis U entsteht also aus dem Polynomring $J = P[U]$ durch Quotientenbildung. Dabei darf aber kein Polynom in den Nenner genommen werden, das in einem vom Einheitsideal verschiedenen Ideal $\mathfrak{R}$ von Q enthalten ist. Ist also $\mathfrak{R}$ insbesondere ein Primideal aus Q und bedeutet S das multiplikativ abgeschlossene System aller durch $\mathfrak{R}$ unteilbaren Polynome aus J, so ist jedenfalls $Q \leqq \frac{J}{S}$.

Wird der rein transzendente Integritätsbereich Q durch den Homomorphismus Φ auf den Körper $\mathfrak{k}$ mit dem Primkörper $\mathfrak{P}$ abgebildet und ist $\Phi(U) = \mathfrak{A}$ das Bild der reinen Transzendenzbasis U, so ist $\mathfrak{k} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A})$.

Denn aus der Tatsache, daß Q im Quotientenkörper von $P(U)$ liegt, geht vermittels Φ unmittelbar die Beziehung $\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{P}(\mathfrak{A})$ hervor und daraus wegen $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}) \leqq \mathfrak{k}$ die Gleichung $\mathfrak{k} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A})$.

Wir sagen nun, der Integritätsbereich Q sei *glatt transzendent bezüglich des Ideals* $\mathfrak{R}$ von Q, wenn er eine reine Transzendenzbasis U besitzt, deren Elemente sämtlich mod. $\mathfrak{R}$ inkongruent sind; wir sagen Q sei *maximal glatt transzendent bezüglich* $\mathfrak{R}$, wenn die reine Transzendenzbasis U ein Repräsentantensystem für die Klassen von $Q/\mathfrak{R}$ darstellt. Die zugehörige Transzendenzbasen U nennen wir bezüglich $\mathfrak{R}$ *glatt* bzw. *maximal glatt.*

Im folgenden werden wir es vornehmlich mit Integritätsbereichen zu tun haben, die bezüglich eines Ideals $\mathfrak{R}$ gleichzeitig abgeschlossen und glatt transzendent sind. Ein solcher Integritätsbereich Q enthält zu jedem Polynom aus dem System S aller durch $\mathfrak{R}$ unteilbaren Polynome von $J = P[U]$ ein reziprokes, d. h. es ist $Q \geqq \frac{J}{S}$. Da andererseits $\mathfrak{R}$ Primideal und folglich nach dem vorhin bemerkten $Q \leqq \frac{J}{S}$ ist, hat man $Q = \frac{J}{S}$.

Wir zeigen:

Es gibt stets einen bezüglich eines Ideals $\mathfrak{R}$ abgeschlossenen und maximal glatt transzendenten Integritätsbereich Q, dessen Restklassenkörper zu einem vorgegebenen Körper $\mathfrak{k}$ isomorph ist. Dabei kann die Charakteristik $\chi(Q)$ noch beliebig so vorgeschrieben werden, daß sie durch $\chi(\mathfrak{k})$ teilbar ist.

Zur Konstruktion von Q gehen wir aus von einem Primintegritätsbereich P, dessen Charakteristik durch $\chi(\mathfrak{k})$ teilbar ist. Jedem Element von $\mathfrak{k}$ denken wir uns ferner umkehrbar eindeutig eine Unbestimmte u zugeordnet, so daß ein mit $\mathfrak{k}$ gleichmächtiges System U von Unbestimmten und eine mengentheoretische Abbildung φ von U auf $\mathfrak{k}$

---

[23]) Entsprechend der Definition des Primelements verstehen wir unter einem Primideal ein vom Einheitsideal verschiedenes Ideal, dessen Restklassenring ein Integritätsbereich ist. Insbesondere rechnen wir das Nullideal eines Integritätsbereichs zu den Primidealen. Das aus einem Primelement abgeleitete Ideal ist stets Primideal.

entsteht. Diese Abbildung φ läßt sich nach Nr. 3 zu einem Homomorphismus Φ' des Polynomringes $J = P[U]$ auf $\mathfrak{P}[\mathfrak{K}] = \mathfrak{K}$ fortsetzen. S sei das System aller Polynome aus J, die bei dem Homomorphismus Φ' nicht auf die Null abgebildet werden. Das System S besteht dann aus allen Polynomen von J, die nicht in dem Ideal n der Elemente mit dem Φ'-Bild 0 enthalten sind, das System $\Phi(S) = \mathfrak{S}$ aus allen von Null verschiedenen Elementen aus $\mathfrak{K}$. Nach Nr. 3 dieses Paragraphen kann also der Homomorphismus Φ' zu einem Homomorphismus Φ des Quotientenrings $Q = \frac{J}{S}$ auf $\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{S}} = \mathfrak{K}$ fortgesetzt werden, und dabei ist $\mathfrak{N} = Q\mathfrak{n}$ das Ideal aller durch Φ' auf die Null abgebildeten Elemente aus Q, also $Q/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{K}$.

Der so erhaltene Integritätsbereich Q ist abgeschlossen bezüglich des Ideals $\mathfrak{N}$ und sein Restklassenkörper ist isomorph zu $\mathfrak{K}$. Die reine Transzendenzbasis U ist ferner glatt bezüglich $\mathfrak{N}$, denn der Homomorphismus Φ ist Fortsetzung von φ, jedes Element aus $\mathfrak{K}$ besitzt daher ein und nur ein Φ-Urbild in U, d. h. jede Klasse von $Q/\mathfrak{N}$ enthält ein und nur ein Element von U.

Für einen bezüglich $\mathfrak{N}$ abgeschlossenen und glatt transzendenten Integritätsbereich Q führen wir endlich noch *das charakteristische Primelement* π ein: Ist χ die Charakteristik des Restklassenkörpers $Q/\mathfrak{N}$ und e das Einselement von Q, so setzen wir $\chi e = \pi$. π ist dann stets in $\mathfrak{N}$ enthalten, und zwar ist $\pi = 0$, wenn $\chi(Q) = \chi(Q/\mathfrak{N})$ ist, dagegen $\pi = pe \neq 0$, wenn $\chi(Q) = 0$, $\chi(Q/\mathfrak{N}) = p$ ist. Im Polynombereich $J = P[U]$ ist π Primelement, d. h. das durch π erzeugte Ideal ist Primideal. In dem Quotientenring $Q = \frac{J}{S}$, bei dem lauter durch $\mathfrak{N}$ und daher durch π unteilbare Polynome im Nenner stehen, bleibt π offenbar Primelement und teilt jedes Element nur in einer endlichen Potenz.

§ 2. Zur Theorie der Exponentenbewertung.

1. Grundbegriffe. $\mathfrak{l}$ sei ein Integritätsbereich. Unter einer Bewertung von $\mathfrak{l}$ verstehen wir im folgenden stets eine Exponentenbewertung, d. h. eine für die von 0 verschiedenen Elemente $\alpha, \beta, \ldots$ von $\mathfrak{l}$ definierte reelle Funktion $w(\alpha)$ mit den Eigenschaften

$$(1) \quad w(\alpha\beta) = w(\alpha) + w(\beta), \qquad (2) \quad w(\alpha + \beta) \geqq \text{Min } [w(\alpha), w(\beta)].$$

Zur Vermeidung von Ausnahmefällen teilen wir auch der Null einen Wert, und zwar den Wert $w(0) = \infty$ zu, und setzen dabei für das Symbol ∞ die Beziehungen: $\infty + w = \infty$ für beliebiges w und $w < \infty$ für jedes endliche w fest.

Aus der Definition folgt: $w(1) = w(-1) = 0$, $w\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -w(\alpha)$. In dem Additionspostulat (2) gilt ferner das Gleichheitszeichen, $w(\alpha + \beta) = \text{Min } [w(\alpha), w(\beta)]$, sobald $w(\alpha) \neq w(\beta)$ ist. Den Funktionswert von w für ein Element α bezeichnen wir als den *Wert* von α, den Wertevorrat der Funktion $w(\alpha)$ bei beliebig in $\mathfrak{l}$ variierendem α als die *Wertmenge* des bewerteten Integritätsbereichs $\mathfrak{l}$. Jedes Element α mit einem Wert $\geqq 0$ heiße *ganz* bezüglich der Bewertung w. Die Menge aller bezüglich w ganzen Elemente aus $\mathfrak{l}$ bildet dann einen Teilintegritätsbereich $\mathfrak{l}_g$, die Menge aller Elemente mit einem Wert > 0 ein Primideal $\mathfrak{p}_g$ von $\mathfrak{l}_g$. Zwei Bewertungen w und w_1 des Integritätsbereichs $\mathfrak{l}$ sind *äquivalent*, wenn für ein Elementepaar α, β stets gleichzeitig die Ungleichungen $w(\alpha) \geqq w(\beta)$ und $w_1(\alpha) \geqq w_1(\beta)$ bestehen.

Ein beliebiger Integritätsbereich $\mathfrak{l}$ kann stets in *trivialer* Weise bewertet werden, indem man nämlich für jedes von 0 verschiedene Element α einfach $w(\alpha) = 0$

setzt. In einem *nichttrivial* bewerteten Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ existiert dagegen stets ein von 0 verschiedenes Element, dessen Wert $\neq 0$ ist, oder was dasselbe besagt, in einem nichttrivial bewerteten Integritätsbereich gilt außer (1) und (2) noch

(3) $\mathfrak{o}$ enthält ein Element $\gamma \neq 0$, dessen Wert $w(\gamma) > 0$ ist.

Ist $\mathfrak{o}^*$ ein $\mathfrak{o}$ umfassender Integritätsbereich und w^* eine Bewertung von $\mathfrak{o}^*$, bei der die Elemente aus $\mathfrak{o}$ den gleichen Wert erhalten wie bei w, so wird w^* eine *Fortsetzung* von w auf $\mathfrak{o}^*$ genannt, umgekehrt $\mathfrak{o}$ ein bewerteter Unterintegritätsbereich des durch w^* bewerteten $\mathfrak{o}^*$. Jede Bewertung w von $\mathfrak{o}$ gestattet eine eindeutig bestimmte Fortsetzung w^* auf den Quotientenkörper K von $\mathfrak{o}$, die man gewinnt, wenn man für die einzelnen Quotienten $w^*\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = w(\alpha) - w(\beta)$ setzt.

2. Konvergenz. Faßt man die Elemente $\alpha, \beta, \ldots$ eines bewerteten Integritätsbereichs $\mathfrak{o}$ als Punkte auf und definiert für beliebiges reelles Δ als Δ-Umgebung $\mathfrak{U}_\Delta(\alpha)$ von α die Menge aller β, für die

$$w(\alpha - \beta) > \Delta$$

ist, so wird $\mathfrak{o}$ zu einem topologischen Raum im Hausdorffschen Sinne [24]). Man kann dann also in $\mathfrak{o}$ alle Begriffe einführen, die überhaupt in topologischen Räumen gebildet werden können, wie etwa den des Häufungspunktes, der konvergenten Folge, des Grenzelementes einer Folge u. s. f. Dabei hat man allerdings zu beachten, daß die Umgebung $\mathfrak{U}_\Delta(\alpha)$ sich mit wachsendem Δ auf α zusammenzieht, mit abnehmendem Δ dagegen sich immer mehr ausdehnt, d. h. daß die Größenbeziehungen den in der Analysis gewohnten gerade entgegengesetzt sind. Einen bewerteten Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ denken wir uns in der vorliegenden Arbeit stets in der soeben angegebenen Weise topologisiert. Ist $\mathfrak{o}$ trivial bewertet, so besteht er als topologischer Raum aus lauter diskreten Punkten; denn aus $w(\alpha - \beta) > 0$ folgt bei trivialer Bewertung bereits $\alpha - \beta = 0$, die Umgebung $\mathfrak{U}_0(\alpha)$ enthält mithin außer α kein weiteres Element von $\mathfrak{o}$. Dagegen ist ein nichttrivial bewerteter Integritätsbereich insichdicht, d. h. jedes Element α ist Häufungspunkt, wie man sofort durch Betrachtung der Menge $\alpha + \gamma^m$ erkennt, wo γ das in Postulat (3) genannte Element bedeutet und m alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Eine Folge von Elementen α_n des bewerteten Integritätsbereichs $\mathfrak{o}$ heißt eine *Nullfolge*, wenn sie gegen Null konvergiert, $\alpha_n \to 0$, d. h. wenn jede Umgebung der Null fast alle α_n enthält. Die allgemeinen Begriffe des Grenzelementes und der Konvergenz können bekanntlich auf den der Nullfolge zurückgeführt werden: Die Folge α_n hat das Element α von $\mathfrak{o}$ als *Grenzelement*, wenn die Differenzenfolge $\gamma_n = \alpha - \alpha_n$ eine Nullfolge ist; die Folge

$$\alpha_0, \ldots, \alpha_m, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

ist *konvergent*, wenn jede Differenzenfolge $\delta_i = \alpha_{n_i} - \alpha_{m_i}$ eine Nullfolge darstellt, wo n_i und m_i je eine Teilfolge der natürlichen Zahlen durchlaufen. Addition und Multiplikation sind stetige Operationen in $\mathfrak{o}$, d. h. aus $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ folgt $\alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta$ und $\alpha_n \beta_n \to \alpha\beta$.

Eine Folge mit Grenzelement α in $\mathfrak{o}$ hat bekanntlich kein $\beta \neq \alpha$ aus $\mathfrak{o}$ zum Grenzelement und ist zugleich konvergent. Wenn auch umgekehrt jede konvergente Folge von $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{o}$ ein Grenzelement besitzt, so wird $\mathfrak{o}$ bezüglich seiner Bewertung *vollständig* genannt. Allgemeiner bezeichnen wir eine Teilmenge M von $\mathfrak{o}$ als vollständig, wenn jede konvergente Folge von M in M ein Grenzelement besitzt. Ein trivial bewerteter Integritätsbereich ist als topologischer Raum mit lauter diskreten Punkten sicher voll-

[24]) F. Hausdorff, Mengenlehre, 1. Aufl. Leipzig 1914. Für alle im folgenden auftretenden Begriffe und Sätze aus der Theorie der topologischen Räume sei ein- für allemal auf dieses Buch verwiesen.

ständig. Dagegen braucht ein nichttrivial bewerteter Integritätsbereich keineswegs vollständig zu sein. Ist er vollständig, so ist er gleichzeitig in sich dicht und vollständig, und man sagt deshalb, er sei *perfekt.*

Nimmt man zu einer Teilmenge M von I alle ihre in I enthaltenen Häufungspunkte hinzu, so erhält man die *abgeschlossene Hülle* $\overline{\mathsf{M}}$ von M bezüglich I, die bekanntlich selbst abgeschlossen ist, also alle ihre Häufungspunkte umfaßt. Jedes Element von $\overline{\mathsf{M}}$ kann als Grenzelement einer Folge von Elementen aus M aufgefaßt werden. Ist M ein Ideal oder ein Teilintegritätsbereich von I, so ist auch die abgeschlossene Hülle ein Ideal oder ein Teilintegritätsbereich von I. Für die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ eines Ideals $\mathfrak{M} = (\ldots, \alpha, \ldots)$ mit der Basis $\{\ldots, \alpha, \ldots\}$ führen wir die Schreibweise $\overline{\mathfrak{M}} = \langle \ldots, \alpha, \ldots \rangle$ ein und nennen $\{\ldots, \alpha, \ldots\}$ eine *Hüllenbasis* von $\overline{\mathfrak{M}}$.

Im Fall eines vollständigen Integritätsbereichs I ist die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathsf{M}}$ von M selbst vollständig. Sie entsteht dann aus M, indem man die in I liegenden Grenzelemente aller konvergenten Folgen von M zu M hinzufügt, und wird daher auch die *vollständige Hülle* von M bezüglich I genannt. Mit Hilfe des Verfahrens, das Cantor zur Konstruktion der Irrationalzahlen verwandte, kann man jeden beliebigen Integritätsbereich I in einen bewerteten vollständigen Oberintegritätsbereich $\bar{\mathsf{I}}$ einbetten, derart, daß erstens die Bewertung von $\bar{\mathsf{I}}$ eine Fortsetzung der Bewertung von I ist und zweitens I die vollständige Hülle von I bezüglich $\bar{\mathsf{I}}$ ist. Das Cantorsche Verfahren ergibt zudem, daß die Struktur von $\bar{\mathsf{I}}$ durch die Struktur von I eindeutig bestimmt ist und daher als die vollständige Hülle von I schlechthin bezeichnet werden kann. Wir führen das unter Verweis auf die in der Einleitung auseinandergesetzten Begriffe des analytischen Isomorphismus und der Struktur schon hier an, obwohl bei unserem jetzigen systematischen Aufbau diese Begriffe erst an späterer Stelle (am Schluß von Nr. 3 dieses Paragraphen) zur Einführung gelangen. Ist $\mathsf{I} = \mathsf{K}$ ein Körper, so ist auch die vollständige Hülle $\bar{\mathsf{I}} = \overline{\mathsf{K}}$ ein Körper.

Wir geben jetzt noch kurz einige Besonderheiten an, die aus der speziellen Form des Additionspostulates (2) der Bewertung folgen und unmittelbar hergeleitet werden können: Besitzt die Folge α_n das Grenzelement α, so ist $w(\alpha - \alpha_n) \geqq \Delta$ für fast alle α_n. Im Falle $\alpha \neq 0$ ist daher $w(\alpha_n) = \mathrm{Min}\,[w(\alpha), w(\alpha - \alpha_n)] = w(\alpha)$ für hinreichend großes n, d. h., der Wert des Grenzelements α gleich dem Wert der α_n mit hinlänglich großem n. Da die Elemente der vollständigen Hülle $\bar{\mathsf{I}}$ von I sämtlich als Grenzwerte von Folgen aus I aufgefaßt werden können, ist also die Wertmenge von $\bar{\mathsf{I}}$ gerade gleich der Wertmenge von I. Eine Folge α_n ist ferner schon dann konvergent, wenn die Differenzenfolge $\delta_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$ eine Nullfolge ist, d. h. eine konvergente Folge läßt sich stets darstellen in der Form

$$\alpha_0, \alpha_0 + \delta_1, \ldots, \alpha_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_n, \ldots,$$

wo die δ_n eine Nullfolge bilden.

Man zeigt leicht:

Ist $\mathsf{I}^* = \bar{\mathsf{I}}$ *die vollständige Hülle von* I, *so ist der Integritätsbereich* I_g^* *aller bei der zugrunde liegenden Bewertung ganzen Elemente aus* I^* *gleich der vollständigen Hülle* $\bar{\mathsf{I}}_g$ *von* I_g. *Ebenso ist* $\mathfrak{p}_g^* = \bar{\mathfrak{p}}_g$, wo $\mathfrak{p}_g^*$ bzw. $\mathfrak{p}_g$ die Primideale aller Elemente von I^* bzw. I mit positivem Exponentenwert bedeuten.

Nach Definition besitzt nämlich jede konvergente Folge aus I ein Grenzelement in $\mathsf{I}^* = \bar{\mathsf{I}}$, und umgekehrt ist jedes Element von $\mathsf{I}^* = \bar{\mathsf{I}}$ Grenzelement einer Folge aus I,

wobei fast alle Elemente der Folge den gleichen Wert haben wie das Grenzelement. Da jedes Element aus $\mathfrak{l}_g$ einen Wert $\geqq 0$ besitzt, hat jedes Grenzelement einer konvergenten Folge von $\mathfrak{l}_g$ notwendig ebenfalls einen Wert $\geqq 0$ und liegt daher in $\mathfrak{l}_g^*$, d. h. es ist $\bar{\mathfrak{l}}_g \leqq \mathfrak{l}_g^*$. Umgekehrt muß jedes Element von $\mathfrak{l}_g^*$ notwendig Grenzelement einer Folge sein, deren Elemente fast alle einen Wert $\geqq 0$ besitzen; jedes Element aus $\mathfrak{l}_g^*$ ist also Grenzelement einer Folge aus $\mathfrak{l}_g$ und mithin $\mathfrak{l}_g^* \leqq \bar{\mathfrak{l}}_g$. Ganz entsprechend gewinnt man die Gleichung $\mathfrak{p}_g^* = \bar{\mathfrak{p}}_g$.

3. Stetige Homomorphismen. In dieser Nummer soll die Definition der stetigen und umkehrbar stetigen Homomorphismen eingeführt werden, die als methodisches Hilfsmittel bei allen folgenden Überlegungen eine wesentliche Rolle spielen. Um einen möglichst klaren Überblick über verschiedene später benutzte Homomorphie- und Isomorphiebegriffe zu geben, gehen wir dabei systematisch vor, schreiten also konsequent vom Allgemeinen zum Speziellen fort. Dadurch wird es zugleich möglich, die hier vorkommenden Erklärungen und Tatsachen in die Theorie der stetigen Abbildungen topologischer Räume einzuordnen und einfache dort bewiesene allgemeine Sätze ohne weiteres zu übernehmen.

a) Stetige und umkehrbar stetige Abbildungen.

J und J' seien zwei bewertete Integritätsbereiche, Φ eine Abbildung der Teilmenge M von J auf die Teilmenge M' von J'. Die Abbildung Φ heißt *stetig* im Punkte α von M, wenn aus einer Konvergenzbeziehung $\alpha_n \to \alpha$ in M jeweils die Konvergenzbeziehung $\Phi(\alpha_n) \to \Phi(\alpha)$ in M' folgt. Φ heißt *umkehrbar stetig* im Punkte α von M, wenn darüber hinaus zu jeder gegen $\Phi(\alpha)$ konvergierenden Folge α_n' aus M' mindestens eine gegen α konvergierende Urbildfolge α_n in M existiert, also eine Folge α_n, für die erstens $\alpha_n \to \alpha$ und zweitens $\Phi(\alpha_n) = \alpha_n'$ gilt. Dieser Begriff der umkehrbaren Stetigkeit setzt, wie sofort ersichtlich, nicht etwa die umkehrbare Eindeutigkeit von Φ voraus; vielmehr kann Φ sehr wohl ein-mehrdeutig und trotzdem umkehrbar stetig sein. Ist Φ in jedem Punkt von M stetig bzw. umkehrbar stetig, so spricht man von einer *stetigen bzw. umkehrbar stetigen Abbildung* der Menge M. Φ wird schließlich eine *gleichmäßig stetige Abbildung* von M genannt, wenn für jede Folge von Elementepaaren α_n, β_n aus M zugleich mit der Differenzenfolge $\beta_n - \alpha_n$ auch die Differenzenfolge der Bilder $\Phi(\beta_n) - \Phi(\alpha_n)$ eine Nullfolge bildet.

Aus der Theorie der stetigen Abbildungen entnimmt man unmittelbar den nachstehenden

Fortsetzbarkeitssatz[25]: *Es seien J und J' zwei vollständige Integritätsbereiche, Φ eine gleichmäßig stetige Abbildung der Teilmenge M von J auf die Teilmenge M' von J' und M_1 eine Obermenge von M, die der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathsf{M}}$ von M angehört.*

Dann läßt sich Φ auf eine und nur eine Weise zu einer stetigen Abbildung Φ_1 von M_1 auf eine Teilmenge von J' fortsetzen. Die Bildmenge $\Phi_1(\mathsf{M}_1) = \mathsf{M}_1'$ liegt in der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathsf{M}}'$ von M'.

Dabei wird die eindeutig bestimmte Abbildung Φ_1 folgendermaßen gewonnen. Man denke sich jedes Element β aus M_1 als Grenzelement einer Folge α_n von Elementen aus M dargestellt, was wegen $\mathsf{M}_1 \leqq \overline{\mathsf{M}}$ sicher möglich ist. Zu der konvergenten Folge α_n suche man die Bildfolge $\Phi(\alpha_n)$ auf. Diese Bildfolge ist konvergent, sie besitzt daher in der vollständigen Menge $\overline{\mathsf{M}}'$ ein Grenzelement β', das sich nur abhängig von β, dagegen unabhängig von der besonderen Wahl der gegen β konvergierenden Folge α_n erweist. Es ist dann $\bar{\Phi}_1(\beta) = \beta'$.

---

[25]) Vgl. etwa H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Berlin 1921, S. 143.

b) Stetige und umkehrbar stetige Homomorphismen.

Wir verstehen nun unter $\mathsf{M} = \mathsf{I}$ und $\mathsf{M}' = \mathsf{I}'$ je einen Unterintegritätsbereich von J und J', unter Φ einen Homomorphismus oder spezieller einen Isomorphismus von I auf I'. Besitzt Φ als Abbildung aufgefaßt eine der zu Anfang dieser Nummer aufgezählten Stetigkeitseigenschaften, so schreiben wir auch dem Homomorphismus bzw. Isomorphismus Φ diese Stetigkeitseigenschaften zu.

Aus der Definition des Homomorphismus und der Möglichkeit, die Konvergenz auf den Begriff der Nullfolge zurückzuführen, ergibt sich sofort die grundlegende Tatsache:

Sobald der Homomorphismus in einem Punkte von I *stetig bzw. umkehrbar stetig ist, ist er bereits in jedem Punkt von* I *stetig bzw. umkehrbar stetig, d. h. stellt einen stetigen bzw. umkehrbar stetigen Homomorphismus von* I *dar. Jeder stetige Homomorphismus von* I *ist zugleich ein gleichmäßig stetiger Homomorphismus von* I.

Bemerkung 1. *Ist* Φ *ein umkehrbar stetiger Homomorphismus von* I, *so besitzt jede konvergente Folge*

$$\alpha'_0, \alpha'_0 + \delta'_1, \ldots, \alpha'_0 + \delta'_1 + \cdots + \delta'_n, \ldots$$

von I' *mindestens eine konvergente Folge*

$$\alpha_0, \alpha_0 + \delta_1, \ldots, \alpha_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_n, \ldots$$

von I *als Urbildfolge.*

Bemerkung 2. *Sind* I *und* I' *zwei trivial bewertete Integritätsbereiche, so ist jeder Homomorphismus von* I *auf* I' *sicher umkehrbar stetig.*

c) Analytischer Isomorphismus.

Ein Isomorphismus Φ heißt ein *analytischer Isomorphismus* von I, wenn bei den in I und I' zugrunde liegenden Bewertungen w und w' für jedes Elementepaar α, β aus I gleichzeitig

$$w(\alpha) \leqq w(\beta) \text{ und } w'(\Phi(\alpha)) \leqq w'(\Phi(\beta))$$

gilt. I und I' selbst werden dann *analytisch isomorph* genannt. Zwei analytisch isomorphe Integritätsbereiche sind entweder beide trivial bewertet oder beide nicht trivial bewertet. Die Äquivalenz zweier Bewertungen w_1 und w_2 von I läßt sich offenbar dem Begriff des analytischen Isomorphismus unterordnen; w_1 und w_2 sind dann und nur dann äquivalent, wenn der identische Isomorphismus einen analytischen Isomorphismus zwischen dem durch w_1 bewerteten I und dem durch w_2 bewerteten I darstellt.

Der Begriff des analytischen Isomorphismus verschärft den Begriff des umkehrbar stetigen Isomorphismus. Es gilt nämlich: *Jeder analytische Isomorphismus von* I *ist zugleich ein umkehrbar stetiger Isomorphismus von* I [26]).

Das braucht nach Bemerkung 2 nur noch für einen nichttrivial bewerteten Integritätsbereich I nachgewiesen zu werden. γ sei also ein Element aus I mit $w(\gamma) > 0$. Dann ist für das Bildelement $\Phi(\gamma) = \gamma'$ zugleich mit $w(\gamma) > w(1) = 0$ auch $w'(\gamma') > w'(1) = 0$. Die Umgebungen V_n bzw. V'_n der Null, die durch alle Elemente β bzw. β' von I bzw. I' mit

$$w(\beta) > w(\gamma^n) \quad \text{bzw.} \quad w'(\beta') > w'(\gamma'^n)$$

gebildet werden, stellen also für $n = 0, 1, 2, \ldots$ je ein Umgebungssystem der Null von der Art dar, daß eine beliebige Umgebung U bzw. U' der Null stets mindestens ein V_n bzw. V'_n enthält. Andererseits wird jedes V_n nach der Definition des analytischen Isomorphismus durch Φ gerade auf das entsprechende V'_n umkehrbar eindeutig abgebildet.

---

[26]) Die Umkehrung hiervon ist bei bewerteten Integritätsbereichen im allgemeinen nicht richtig. Wohl aber ist ein umkehrbar stetiger Isomorphismus zwischen bewerteten Körpern stets auch ein analytischer Isomorphismus.

Daraus entnimmt man, daß Φ im Punkte Null umkehrbar stetig und daher überhaupt ein umkehrbar stetiger Isomorphismus ist.

d) Fortsetzung eines stetigen Homomorphismus.

Wir setzen jetzt voraus, die Integritätsbereiche J und J' seien vollständig, Φ sei ein stetiger Homomorphismus von $\mathfrak{l}$ auf $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}_1$ ein Oberintegritätsbereich von $\mathfrak{l}$, der der vollständigen Hülle $\bar{\mathfrak{l}}$ von $\mathfrak{l}$ in J angehört, $\mathfrak{l} \leqq \mathfrak{l}_1 \leqq \bar{\mathfrak{l}}$. Da Φ als stetiger Homomorphismus bereits gleichmäßig stetig ist, kann man Φ nach dem Fortsetzungssatz auf eine und nur eine Weise zu einer stetigen Abbildung Φ von $\mathfrak{l}_1$ auf eine Teilmenge von J' fortsetzen. Aus der vorhin angegebenen Bildungsweise dieser Fortsetzung liest man ohne weiteres ab, daß sie wieder ein Homomorphismus ist, d. h.

Satz 1. *Der stetige Homomorphismus Φ von $\mathfrak{l}$ kann auf eine und nur eine Weise zu einem stetigen Homomorphismus Φ_1 von $\mathfrak{l}_1$ auf einen Teilintegritätsbereich von J' fortgesetzt werden. Dabei liegt der Bildintegritätsbereich $\Phi_1(\mathfrak{l}_1) = \mathfrak{l}_1'$ in der vollständigen Hülle $\bar{\mathfrak{l}}'$ von $\mathfrak{l}'$.*

Ist Φ insbesondere ein stetiger Isomorphismus, so braucht die Fortsetzung Φ_1 die nach Satz 1 selbstverständlich ein Homomorphismus ist, nicht notwendig wieder ein Isomorphismus zu sein, wie man an Beispielen erkennt. Allgemeiner: Ist $\mathfrak{M}$ das Ideal aller Elemente aus $\mathfrak{l}$, die durch den stetigen Homomorphismus Φ auf die 0 abgebildet werden, so umfaßt das Ideal $\mathfrak{M}_1$ aller Elemente von $\mathfrak{l}_1$, die durch die stetige Fortsetzung Φ_1 in die 0 übergeführt werden, sicher die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{l}_1}$ von $\mathfrak{M}$ bezüglich $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{M}_1 \geqq \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{l}_1}$; $\mathfrak{M}$ braucht aber nicht notwendig gleich $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{l}_1}$ zu sein. Dagegen gilt:

Satz 2. *Im Falle eines umkehrbar stetigen Homomorphismus Φ ist stets $\mathfrak{M}_1 = \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{l}_1}$. Die vollständige Hülle $\mathfrak{l}_1 = \bar{\mathfrak{l}}$ von $\mathfrak{l}$ wird durch die stetige Fortsetzung $\Phi_1 = \bar{\Phi}$ des umkehrbar stetigen Homomorphismus Φ auf die vollständige Hülle $\bar{\mathfrak{l}}'$ von $\mathfrak{l}'$ abgebildet, und es ist das Ideal aller Elemente aus $\bar{\mathfrak{l}}$, die durch $\bar{\Phi}$ auf die 0 abgebildet werden, gleich der vollständigen Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{M}$, also $\bar{\mathfrak{l}}/\overline{\mathfrak{M}} \cong \bar{\mathfrak{l}}'$* [26a]).

Sei nämlich zunächst $\bar{\alpha}$ ein Element aus $\mathfrak{M}_1$, mithin

$$\Phi_1(\bar{\alpha}) = 0.$$

Diese Gleichung besagt gemäß der Bildungsweise von Φ_1, daß eine gegen $\bar{\alpha}$ konvergierende Folge von Elementen aus $\mathfrak{l}$,

$$\alpha_n \to \bar{\alpha},$$

durch den Homomorphismus Φ auf eine Nullfolge α_n' abgebildet wird,

$$\alpha_n' \to 0, \text{ wo } \alpha_n' = \Phi(\alpha_n).$$

Infolge der umkehrbaren Stetigkeit von Φ existiert zu der Nullfolge α_n' mindestens eine Urbildnullfolge β_n also

$$\beta_n \to 0 \text{ und } \alpha_n' = \Phi(\beta_n).$$

Die Folge $\alpha_n - \beta_n$ konvergiert dann ebenfalls gegen $\bar{\alpha}$ und besteht aus lauter Elementen von $\mathfrak{M}$, weil $\Phi(\alpha_n - \beta_n) = \alpha_n' - \alpha_n' = 0$ ist, d. h. $\bar{\alpha}$ gehört wirklich zu $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{l}_1}$.

Um ferner zu zeigen, daß bei der stetigen Fortsetzung $\bar{\Phi}$ eines umkehrbar stetigen Homomorphismus Φ stets $\bar{\Phi}(\bar{\mathfrak{l}}) = \bar{\mathfrak{l}}'$ ist, haben wir wegen der Beziehung $\bar{\Phi}(\bar{\mathfrak{l}}) \leqq \bar{\mathfrak{l}}'$ nur jedes beliebige Element $\bar{\alpha}'$ von $\bar{\mathfrak{l}}'$ als Bild eines Elements $\bar{\alpha}$ von $\bar{\mathfrak{l}}$ nachzuweisen. Zu diesem Zwecke betrachten wir eine gegen $\bar{\alpha}'$ konvergierende Folge von Elementen α_n' aus $\mathfrak{l}'$. Diese Folge α_n' besitzt nach Bemerkung 1 bei dem umkehrbar stetigen Homomorphismus Φ mindestens eine konvergente Folge α_n aus $\mathfrak{l}$ als Urbildfolge. Das Grenzelement $\bar{\alpha}$ der Folge α_n gehört zu der vollständigen Hülle $\bar{\mathfrak{l}}$, und gemäß der Bil-

[26a]) Auf diesem Satz beruht die Bedeutung des von uns eingeführten Begriffes der umkehrbaren Stetigkeit.

dungsweise der stetigen Fortsetzung $\bar{\Phi}$ ist

$$\bar{\Phi}(\bar{\alpha}) = \lim \Phi(\alpha_n) = \lim \alpha_n' = \bar{\alpha}'.$$

Schließlich ist das Ideal aller Elemente aus $\bar{\mathfrak{l}}$, die durch $\bar{\Phi}$ auf die 0 abgebildet werden, nach dem schon bewiesenen ersten Teil des Satzes gleich der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{M}$ bezüglich $\bar{\mathfrak{l}}$, mithin, weil $\bar{\mathfrak{l}}$ selbst vollständig ist, gleich der vollständigen Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{M}$, und daher $\bar{\mathfrak{l}}/\overline{\mathfrak{M}} \simeq \bar{\mathfrak{l}}'$.

Aus dem ersten Teil von Satz 2 folgt speziell, daß die stetige Fortsetzung Φ_1 eines umkehrbar stetigen Isomorphismus Φ wieder ein Isomorphismus ist; denn im Falle eines Isomorphismus Φ besteht das Ideal $\mathfrak{M}$ aus der Null allein, die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{M}}_1$ ist daher wiederum das Nullideal und mithin Φ_1 wieder ein Isomorphismus. Für einen analytischen Isomorphismus Φ ergibt sich darüber hinaus aus der Bildungsweise von Φ_1, daß die stetige Fortsetzung Φ_1 wieder einen analytischen Isomorphismus darstellt. Insbesondere besagt dann der zweite Teil von Satz 2 die schon oben als Ausfluß aus dem Cantorschen Verfahren hingestellte Tatsache, daß die vollständigen Hüllen $\bar{\mathfrak{l}}$ und $\bar{\mathfrak{l}}'$ zweier analytisch isomorpher Integritätsbereiche $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$, unabhängig von den vollständigen Einbettungsintegritätsbereichen J und J', wieder analytisch isomorph sind.

4. Stetige Kongruenzhomomorphismen. In dieser Arbeit werden wir es besonders häufig mit einem Kongruenzhomomorphismus eines bewerteten Integritätsbereichs $\mathfrak{l}$ zu tun haben, der aus lauter ganzen Elementen bezüglich der zugrunde liegenden Bewertung besteht. $\mathfrak{p}$ sei das Primideal aller Elemente aus $\mathfrak{l}$, deren Wert > 0 ist, $\mathfrak{N}$ ein Primideal $\geqq \mathfrak{p}$, und Φ der Kongruenzhomomorphismus von $\mathfrak{l}$ auf $\mathfrak{l}/\mathfrak{N} = \mathfrak{J}$, also Φ der $\mathfrak{N}$-Kongruenzhomomorphismus von $\mathfrak{l}$. Man erkennt leicht:

Legt man in dem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ die triviale Bewertung zugrunde, so ist der Kongruenzhomomorphismus Φ umkehrbar stetig.

Das Primideal $\mathfrak{p}$ stellt nämlich eine Umgebung der Null in $\mathfrak{l}$ dar und wird durch Φ auf den in $\mathfrak{J}$ diskret liegenden Punkt Null abgebildet. Daraus folgt sofort, daß Φ umkehrbar stetig im Punkte Null von $\mathfrak{l}$ ist, mithin einen umkehrbar stetigen Homomorphismus von $\mathfrak{l}$ bildet.

Das Ideal aller Elemente aus $\bar{\mathfrak{l}}$, die durch $\bar{\Phi}$ auf die Null abgebildet werden, stimmt ferner mit der vollständigen Hülle $\overline{\mathfrak{N}}$ von $\mathfrak{N}$ bezüglich $\bar{\mathfrak{l}}$ überein. Da $\bar{\Phi}$ Fortsetzung des $\mathfrak{N}$-Kongruenzhomomorphismus Φ ist, besteht die Gleichung $\overline{\mathfrak{N}} \frown \mathfrak{l} = \mathfrak{N}$, und da jedes Element $\bar{\alpha}$ aus $\bar{\mathfrak{l}}$ Grenzwert einer konvergenten Folge aus $\mathfrak{l}$ ist, gibt es zu $\bar{\alpha}$ stets ein Element α von $\mathfrak{l}$, so daß $\bar{\alpha} - \alpha$ in der Umgebung $\bar{\mathfrak{p}}$ der Null liegt, also $\alpha \equiv \bar{\alpha}$ mod. $\overline{\mathfrak{N}}$ ist. Es ist mithin $\mathfrak{l}$ zu $\bar{\mathfrak{l}}/\overline{\mathfrak{N}}$ kongruenthomomorph, und aus § 1, Nr. 1 schließt man daher:

Die Restklassenringe $\mathfrak{l}/\mathfrak{N}$ und $\bar{\mathfrak{l}}/\overline{\mathfrak{N}}$ sind kongruentisomorph.

Wir setzen nun $\mathfrak{l}$ selbst bereits als vollständig voraus, und verstehen unter $\mathfrak{l}_0$ einen Teilintegritätsbereich von $\mathfrak{l}$ unter $\mathfrak{l}_1$ einen Oberintegritätsbereich von $\mathfrak{l}_0$, der in der vollständigen Hülle $\bar{\mathfrak{l}}_0$ von $\mathfrak{l}_0$ bezüglich $\mathfrak{l}$ enthalten ist. Ordnet man jedem Element aus $\mathfrak{l}_0$ seine Klasse mod. $\mathfrak{N}$ zu, so erhält man den $\mathfrak{N}$-Kongruenzhomomorphismus von $\mathfrak{l}_0$ auf einen Teilintegritätsbereich $\mathfrak{J}_0$ von $\mathfrak{J}$. Der $\mathfrak{N}$-Kongruenzhomomorphismus von $\mathfrak{l}_1$ stellt nach dem soeben erwähnten eine stetige Fortsetzung des $\mathfrak{N}$-Kongruenzhomomorphismus von $\mathfrak{l}_0$ dar. Andererseits besitzt der $\mathfrak{N}$-Kongruenzhomomorphismus von $\mathfrak{l}_0$ nach Satz 1 nur eine stetige Fortsetzung, die $\mathfrak{l}_1$ auf einen in der vollständigen Hülle $\overline{\mathfrak{J}}_0$ von $\mathfrak{J}_0$ enthaltenen Oberintegritätsbereich von $\mathfrak{J}_0$ abbildet. Da $\overline{\mathfrak{J}}_0 = \mathfrak{J}_0$ ist, gibt das:

Zwei Teilintegritätsbereiche $\mathfrak{l}_0$ *und* $\mathfrak{l}_1$ *des vollständigen Integritätsberichs* $\mathfrak{l}$, *für die* $\mathfrak{l}_0 \leqq \mathfrak{l}_1 \leqq \bar{\mathfrak{l}}_0$ *ist, werden durch den* $\mathfrak{N}$*-Kongruenzhomomorphismus auf denselben Integritätsbereich* $\mathfrak{J}_0$ *abgebildet.*

5. Bewertungsringe. Ist $\mathfrak{l} = \mathsf{K}$ ein Körper, so bildet die Menge aller Elemente von K, die bei der zugrunde liegenden Bewertung ganz sind, also einen Wert $\geqq 0$ besitzen, den *Bewertungsring* B von K, die Menge aller Elemente mit einem Wert > 0 das *zugehörige Primideal* $\mathfrak{p}$. K ist Quotientenkörper von B. Jedes durch $\mathfrak{p}$ unteilbare Element aus B hat den Wert 0 und ist daher Einheit von B, d. h. B ist hinsichtlich $\mathfrak{p}$ abgeschlossen. Der Restklassenring $\mathsf{B}/\mathfrak{p}$ ist mithin ein Körper; er heißt der dem bewerteten Körper K *zugehörige Restklassenkörper.*

Über die Bewertungsringe führen wir einige einfache Tatsachen an.

Zwei bewertete Körper K *und* K′ *sind dann und nur dann analytisch isomorph, wenn die zugehörigen Bewertungsringe* B *und* B′ *isomorph sind. Zwei Bewertungen desselben Körpers sind dann und nur dann äquivalent, wenn die zugehörigen Bewertungsringe übereinstimmen.*

Ist nämlich Φ ein analytischer Isomorphismus von K auf K′, so bildet Φ die Menge aller Elemente β aus K mit $w(\beta) \geqq w(1) = 0$ umkehrbar eindeutig auf die Menge aller β' aus K′ mit $w'(\beta') \geqq w'(1) = 0$ ab, also den Bewertungsring B isomorph auf B′ ab. Stellt umgekehrt Φ_0 einen Isomorphismus von B auf B′ dar, so kann Φ_0 zunächst zu einem Isomorphismus Φ des Quotientenkörpers K von B auf den Quotientenkörper K′ von B′ fortgesetzt werden. Dieser Isomorphismus Φ ist aber ein analytischer Isomorphismus. Für jedes Elementepaar α, β aus K gilt nämlich zugleich mit $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathsf{B}$ auch $\frac{\Phi(\alpha)}{\Phi(\beta)} = \Phi_0\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \in \mathsf{B}'$ und umgekehrt, d. h. zugleich mit $w(\alpha) \geqq w(\beta)$ ist auch $w'(\Phi(\alpha)) \geqq w'(\Phi(\beta))$ und umgekehrt.

Die Behauptung über äquivalente Bewertungen folgt nun durch Spezialisierung auf den identischen Isomorphismus.

Ist $\mathsf{K}^* = \bar{\mathsf{K}}$ *die vollständige Hülle von* K, *so stimmt der Bewertungsring* B* *und das Primideal* $\mathfrak{p}^*$ *von* K* *je mit der vollständigen Hülle* $\bar{\mathsf{B}}$ *und* $\bar{\mathfrak{p}}$ *des Bewertungsrings* B *bzw. des Primideals* $\mathfrak{p}$ *von* K *überein. Der Restklassenkörper* $\mathsf{B}/\mathfrak{p}$ *ist zu* $\mathsf{B}^*/\mathfrak{p}^*$ *kongruentisomorph.*

Der erste Teil dieser Behauptung geht aus dem Schluß der Nr. 2, der zweite aus der vorigen Nummer dieses Paragraphen hervor. Sie besagt insbesondere, daß der Bewertungsring eines vollständigen Körpers selbst vollständig ist, und daß der Quotientenkörper eines vollständigen Bewertungsrings einen vollständigen Körper bildet [27]).

Jedes Ideal $\mathfrak{r}$ *eines vollständigen Bewertungsringes ist vollständig.*

Ist nämlich ϱ_n eine konvergente Folge von Elementen aus $\mathfrak{r}$, so hat das Grenzelement ϱ nach Nr. 2 dieses Paragraphen denselben Wert wie ein ϱ_n mit hinlänglich großem Index. $\frac{\varrho}{\varrho_n}$ ist also eine Einheit ε, d. h. $\varrho = \varepsilon\varrho_n$ gehört zugleich mit ϱ_n zu $\mathfrak{r}$.

6. Algebraische Erweiterungen vollständiger Körper. Die Bewertung w eines vollständigen Körpers K gestattet nach Kürschák und Ostrowski [28]) eine eindeutig bestimmte Fortsetzung w^* auf eine beliebige endliche algebraische Erweiterung K* von K. Dabei ist K* hinsichtlich w^* wiederum vollständig. Ist α^* irgendein Element aus K*

---

[27]) Dagegen braucht der Quotientenkörper eines beliebigen vollständigen Integritätsbereichs im allgemeinen nicht wieder vollständig zu sein.

[28]) J. Kürschák, loc. cit. 3); A. Ostrowski, J. reine angew. Math. **147** (1917).

und $x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0$ die irreduzible Gleichung mit Koeffizienten aus K, der α^* genügt, so ist $w^*(\alpha^*) = \frac{1}{n} w(\alpha)$.

Für die Polynome über einem vollständigen Bewertungsring B mit dem zugehörigen Primelement $\mathfrak{p}$ gelten ferner die folgenden Sätze, die im Fall der p-adischen Zahlen zuerst von K. Hensel, später allgemein von K. Rychlík[29]) bewiesen wurden, und die ein wichtiges Hilfsmittel bei unserem Beweise bilden werden.

Erster Henselscher Satz. *Sei*

$$G(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

ein Polynom mit Koeffizienten aus dem vollständigen Bewertungsring B, *das mod.* $\mathfrak{p}$ *als Produkt zweier mod.* $\mathfrak{p}$ *teilerfremder Faktoren* $F_0(x)$ *und* $H_0(x)$ *je mit dem Einselement als höchstem Koeffizienten darstellbar ist,*

$$G(x) \equiv F_0(x)\, H_0(x) \mod \mathfrak{p}.$$

Dann gibt es über B *zwei eindeutig bestimmte Polynome* $F(x)$ *und* $H(x)$ *mit dem Einselement als höchsten Koeffizienten und den Eigenschaften:*

(1) $$G(x) = F(x)\, H(x);$$

(2) $$F(x) \equiv F_0(x), \quad H(x) \equiv H_0(x) \mod \mathfrak{p}.$$

Speziell: *Ist* ξ_0 *mod.* $\mathfrak{p}$ *eine einfache Nullstelle von* $G(x)$ *in* B, *also* $G(\xi_0) \equiv 0$ *mod.* $\mathfrak{p}$, *so enthält* B *stets eine eindeutig bestimmte zu* ξ_0 *mod.* $\mathfrak{p}$ *kongruente Nullstelle* ξ *schlechthin von* $G(x)$,

$$G(\xi) = 0; \quad \xi \equiv \xi_0 \mod \mathfrak{p}.$$

Zweiter Henselscher Satz. *Sind*

$$G(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$
$$H(x) = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \cdots + \beta_n$$

zwei Polynome mit Koeffizienten aus dem vollständigen Bewertungsring B, *die beide mod.* $\mathfrak{p}$ *keine mehrfache Nullstelle besitzen, und für deren Koeffizienten bei der zugrunde liegenden Bewertung* $w(\alpha_i - \beta_i) \geqq s > 0$, *also sicher* $G(x) \equiv H(x)$ *mod.* $\mathfrak{p}$ *gilt, so ist für zwei in* B *liegende mod.* $\mathfrak{p}$ *kongruente Nullstellen* ξ *und* η *von* $G(x)$ *und* $H(x)$ *stets* $w(\xi - \eta) \geqq s$.

§ 3. Zur Theorie der diskreten Bewertung.

1. Kennzeichnung des zugehörigen Bewertungsrings. Denkt man sich die Werte des durch w bewerteten Integritätsbereichs I auf die reelle Zahlgerade aufgetragen, so bestehen zwei Möglichkeiten. Entweder 0 ist Häufungspunkt von Werten und die Werte liegen daher überall dicht, weil mit $w(\alpha)$ stets auch $nw(\alpha) = w(\alpha^n)$ Wert eines Elements aus I ist. Oder aber 0 ist nicht Häufungspunkt, d. h. es gibt bei nichttrivialer Bewertung w sicher ein Element π von kleinstem positivem Wert, und ganzzahlige Division mit Rest durch diesen Wert $w(\pi)$ lehrt dann, daß jeder Wert $w(\alpha)$ ganzzaliges Vielfaches von $w(\pi)$ ist, $w(\alpha) = mw(\pi)$. Im ersten Fall nennen wir die Bewertung w selbst *dicht*, im zweiten *diskret*.

Im folgenden sollen einige für unsere weiteren Überlegungen wichtige Eigenschaften der diskreten Bewertungen zusammengestellt werden.

Ist K ein diskret bewerteter Körper, B der zugehörige Bewertungsring und $\mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal, so ist jedes von Null verschiedene Körperelement α infolge der Gleichung $w(\alpha) = mw(\pi) = w(\pi^m)$ darstellbar in der Form $\alpha = \varepsilon\pi^m$, wo ε Einheit in B

[29]) K. Rychlík, Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper, J. reine angew. Math. **153** (1924).

und m dann und nur dann nichtnegativ bzw. positiv ist, wenn α zu B bzw. $\mathfrak{p}$ gehört. π ist daher eine Basis des Primideals $\mathfrak{p}$, also selbst Primelement. Besitzt umgekehrt das zugehörige Primideal $\mathfrak{p}$ eines Bewertungsrings B eine eingliedrige Basis π, so ist der Wert jedes Elements aus dem Quotientenkörper notwendig Vielfaches des Werts von π, d. h.:

Ein Bewertungsring B *gehört dann und nur dann zu einer diskreten Bewertung, wenn sein zugehöriges Primideal* $\mathfrak{p}$ *ein Hauptideal* $\mathfrak{p} = (\pi)$ *ist.*

π bezeichnen wir dann als ein zu B gehöriges Primelement. Wir sprechen ferner von einem p-adischen Bewertungsring, wenn B die Charakteristik 0 besitzt und die Primzahl p (d. h. das p-fache des Einselements von B) ein zu B gehöriges Primelement ist. Der Quotientenkörper eines p-adischen Bewertungsrings heißt p-adisch bewertet.

Enthält der Integritätsbereich I ein Primelement π, und ist jedes von Null verschiedene Element von I nur durch eine endliche Potenz von π teilbar, so bekommt man eine diskrete Bewertung von I, indem man jedem von Null verschiedenen Element als Wert den höchsten Exponenten zuordnet, mit dem π in ihm aufgeht. w^* bedeute die eindeutig bestimmte Fortsetzung von w auf den Quotientenkörper K. w^* ist dann wiederum diskret, und zwar besteht die Wertmenge von I und K aus lauter ganzen Zahlen; wir nennen w bzw. w^* deshalb die *durch das Primelement* π *erzeugte ganzzahlige* Bewertung von I bzw. K.

Man erkennt nun ohne Schwierigkeit:

Ein Ring R *ist dann und nur dann ein Bewertungsring, der zu einer diskreten Bewertung gehört, wenn er folgende drei Eigenschaften besitzt.*

a) *Er ist ein Integritätsbereich.*

b) *Er enthält ein Primelement* π, *das jedes von Null verschiedene Element nur in einer endlichen Potenz teilt.*

c) *Jedes durch* π *unteilbare Element ist Einheit.*

π ist dann ein zu dem Bewertungsring R gehöriges Primelement.

Zu jeder diskreten Bewertung eines Körpers existiert eine äquivalente ganzzahlige Bewertung, die durch das zugehörige Primideal $\mathfrak{p} = (\pi)$ des Bewertungsrings erzeugt wird. Wir können daher eine diskrete Bewertung stets als ganzzahlig voraussetzen.

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen erwähnen wir noch:

Ist

$$\mathsf{B}_1 \subseteq \mathsf{B}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{B}_\lambda \subseteq \cdots$$

eine wohlgeordnete Kette von Bewertungsringen, und ist das feste Element π *ein zu jedem* B_λ *gehöriges Primelement, so ist auch die Vereinigungsmenge der* B_λ *ein Bewertungsring mit dem zugehörigen Primelement* π.

B ist nämlich als Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Folge von Integritätsbereichen sicher selbst wieder ein Integritätsbereich. Ist ferner α ein beliebiges Element aus B, so liegt α notwendig in einem B_λ und ist dort nach Voraussetzung darstellbar in der Form $\alpha = \varepsilon \pi^n$, wo ε eine Einheit von B_λ und daher auch eine Einheit von B ist. Daraus schließt man sofort, daß B einen Bewertungsring mit dem zugehörigen Primelement π darstellt.

2. Konvergenz in diskret bewerteten Integritätsbereichen. Der Integritätsbereich I enthalte ein Primelement π, das jedes von 0 verschiedene Element nur in einer endlichen Potenz teilt, und es sei w die durch π erzeugte Bewertung. Jedes Element von I ist dann ganz bezüglich w, und das Primideal $\mathfrak{p}$ aller Elemente von I mit einem Wert > 0 ist gleich dem Hauptideal (π).

Ist $\bar{\mathsf{I}}$ *die vollständige Hülle von* I *und* $\bar{\mathfrak{p}}$ *die vollständige Hülle von* $\mathfrak{p}$ *bezüglich* I, *so ist* $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathsf{I}}\,\mathfrak{p}$. *Allgemein ist die vollständige Hülle* $\overline{\mathfrak{M}}$ *eines Ideals* $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{p}$ aus I *gleich dem Erweiterungsideal* $\bar{\mathsf{I}}\,\mathfrak{M}$.

Denkt man sich nämlich jedes Element $\bar{\alpha}$ aus $\bar{\mathfrak{p}}$ jeweils als Grenzelement einer Folge α_n von Elementen aus $\mathfrak{p}$ dargestellt, wo notwendig $\alpha_n = \beta_n \pi$ ist, so ist auch die Folge $\frac{\alpha_n}{\pi} = \beta_n$ eine konvergente Folge aus $\mathfrak{l}$ und besitzt daher ein Grenzelement $\bar{\beta}$ in $\bar{\mathfrak{l}}$. Es ist dann offenbar $\bar{\alpha} = \bar{\beta}\pi$, mithin $\bar{\mathfrak{p}} \leqq \bar{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{p}$. Da andererseits sicher $\bar{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{p} \leqq \bar{\mathfrak{p}}$ ist, hat man wirklich $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{p}$.

Allgemein denke man sich jedes Element $\bar{\mu}$ aus $\overline{\mathfrak{M}}$ als Grenzelement einer Folge μ_n von Elementen aus $\mathfrak{M}$ dargestellt, so daß $\bar{\mu} - \mu_n \in \bar{\mathfrak{p}}$ für hinlänglich großes n und folglich $\bar{\mu} = \mu_n + \bar{\beta}\pi$ gilt. Wegen $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{p}$ gibt das tatsächlich $\overline{\mathfrak{M}} \leqq \bar{\mathfrak{l}}\mathfrak{M}$. Da andererseits wieder sicher $\bar{\mathfrak{l}}\mathfrak{M} \leqq \overline{\mathfrak{M}}$ ist, besteht die Gleichung $\overline{\mathfrak{M}} = \bar{\mathfrak{l}}\mathfrak{M}$.

Aus dem soeben Bewiesenen folgt insbesondere, daß die vollständige Hülle eines Bewertungsrings mit dem zugehörigen Primelement π wieder π als zugehöriges Primelement besitzt. Die vollständige Hülle eines diskret bewerteten Körpers ist sicher wieder diskret bewertet.

Der Integritätsbereich $\mathfrak{l}$ mit dem Primelement π werde jetzt durch den Homomorphismus Φ auf einen bewerteten Integritätsbereich $\mathfrak{l}'$ abgebildet, dessen Elemente ebenfalls alle bezüglich der zugrunde liegenden Bewertung ganz sind. $\mathfrak{p}'$ sei das Primideal aller Elemente aus $\mathfrak{l}'$, deren Wert > 0 ist.

Liegt das Bild $\Phi(\pi) = \pi'$ *in* $\mathfrak{p}'$ *so ist* Φ *ein stetiger Homomorphismus von* $\mathfrak{l}$; *ist sogar* $\mathfrak{p}' = (\pi')$, *so ist* Φ *umkehrbar stetig.*

Jede Nullfolge von $\mathfrak{l}$ ist nämlich von der Form

$$\alpha_n = \beta_n \pi^{m_n}, \tag{1}$$

wo β_n durch π unteilbar ist und die Exponenten m_n mit wachsendem n gegen ∞ gehen. Die Bildfolge

$$\alpha'_n = \beta'_n \pi'^{m_n} \tag{2}$$

ist daher im Falle $\pi' \in \mathfrak{p}'$ sicher wieder eine Nullfolge, d. h. Φ ist stetig im Punkte 0 und mithin ein stetiger Homomorphismus von $\mathfrak{l}$. Wenn sogar $\mathfrak{p}' = (\pi')$ ist, so hat jede Nullfolge aus $\mathfrak{l}'$ die Gestalt (2) und besitzt folglich eine Nullfolge (1) aus $\mathfrak{l}$ zur Urbildfolge, d. h. Φ ist umkehrbar stetig im Punkte 0 und stellt daher überhaupt einen umkehrbar stetigen Homomorphismus dar.

3. π-adische Reihen. Ein System von Elementen $\{\omega_n\}$ aus dem nichttrivial und ganzzahlig bewerteten Körper K, das zu jeder ganzen Zahl n genau ein Element mit dem Wert $w(\omega_n) = n$ enthält, heiße ein Repräsentantensystem für die Werte von K; ein System von Elementen $\{\varrho\}$ aus dem Bewertungsring B von K, in dem aus jeder Klasse des Restklassenkörpers $\mathsf{B}/\mathfrak{p}$ genau ein Element ϱ und zwar für die Nullklasse insbesondere der Repräsentant 0 vorkommt, heiße ein Repräsentantensystem für die Klassen von $\mathsf{B}/\mathfrak{p}$. Als Repräsentantensystem für die Werte von K kann man insbesondere die positiven und negativen Potenzen π^n des Primelements π von B wählen.

Mit Hilfe eines festen Repräsentantensystems $\{\omega_n\}$ für die Werte von K und eines festen Repräsentantensystems $\{\varrho\}$ für die Restklassen von $\mathsf{B}/\mathfrak{p}$, kann man jedes Element $\alpha \neq 0$ aus K in eine eindeutig bestimmte Reihe

$$\alpha = \varrho_a \omega_a + \varrho_{a+1} \omega_{a+1} + \cdots \qquad (\varrho_a \neq 0) \tag{3}$$

entwickeln.

Hat nämlich α den Wert $w(\alpha) = a$, so ist $w\left(\frac{\alpha}{\omega_a}\right) = 0$, also $\frac{\alpha}{\omega_n}$ mod. $\mathfrak{p}$ einem Element $\varrho_a \neq 0$ aus $\{\varrho\}$ kongruent, d. h. man hat $\alpha = \varrho_a \omega_a + \alpha'$ mit $w(\alpha') > a$. Indem man

nun weiter mit α' entsprechend verfährt, wie eben mit α, erhält man tatsächlich eine Reihe der angegebenen Gestalt, und diese Reihe ist, wie man leicht erkennt, eindeutig bestimmt. Benützt man als Repräsentantensystem für die Werte insbesondere die Potenzen von π, so ergibt sich für jedes α eine π-adische Reihe

$$\alpha = \varrho_a \pi^a + \varrho_{a+1} \pi^{a+1} + \cdots.$$

Da beim Übergang von dem ganzzahlig bewerteten Körper K zur vollständigen Hülle $\overline{\mathsf{K}}$ die Wertmenge ungeändert bleibt, stellt das System $\{\omega_n\}$ bzw. $\{\pi^n\}$ aus K auch ein Repräsentantensystem für die Werte von $\overline{\mathsf{K}}$ dar. Ebenso ist das zu B gehörige Repräsentantensystem $\{\varrho\}$ für die Klassen von $\mathsf{B}/\mathfrak{p}$ auch ein Repräsentantensystem für die Klassen von $\overline{\mathsf{B}}/\bar{\mathfrak{p}}$, weil $\mathsf{B}/\mathfrak{p}$ zu $\overline{\mathsf{B}}/\bar{\mathfrak{p}}$ kongruentisomorph ist. Mit Hilfe von $\{\omega_n\}$ und $\{\varrho\}$ läßt sich daher auch jedes Element $\bar{\alpha}$ der vollständigen Hülle $\overline{\mathsf{K}}$ in eine Reihe der Gestalt (3) entwickeln. Umgekehrt umfaßt der vollständige Körper $\overline{\mathsf{K}}$ aber auch jede solche Reihe, weil ihre Partialsummen offenbar eine konvergente Folge bilden, die Summe selbst also Grenzelement einer konvergenten Folge ist. Wir haben somit das Resultat:

Die vollständige Hülle $\overline{\mathsf{K}}$ *besteht aus allen Reihen* (3), *wo die* ω *und* ϱ *einem festen, aus Elementen von* K *bestehenden Repräsentantensystem* $\{\omega_n\}$ *bzw.* $\{\varrho\}$ *für die Werte von* K *bzw. die Klassen von* $\mathsf{B}/\mathfrak{p}$ *entnommen sind. Speziell:* $\overline{\mathsf{K}}$ *besteht aus allen* π*-adischen Reihen*

$$\varrho_a \pi^a + \varrho_{a+1} \pi^{a+1} + \ldots,$$

wo π *ein Primelement des Bewertungsrings* B *von* K *ist.*

4. Eisensteinscher Oberkörper eines vollständigen diskret bewerteten Körpers. Sei jetzt K ein nichttrivial und ganzzahlig bewerteter, vollständiger Körper mit dem Bewertungsring B und dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p} = (\pi)$ und K^* ein algebraischer Oberkörper n-ten Grades über K. Bei Fortsetzung der Bewertung w von K auf K^* sind die positiven Werte w^* der Elemente von K^* nach dem allgemeinen Kürschákschen Resultat sämtlich $\geqq \frac{1}{n}$. Die Fortsetzung w^* ist daher wieder diskret.

Satz 3. *Ist* $\mathsf{K}^* = \mathsf{K}(\pi^*)$ *ein Eisensteinscher Oberkörper n-ten Grades über* K, *d. h. ist das erzeugende Element* π^* *Wurzel einer Eisensteinschen Gleichung*

$$x^n = \pi(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1}) \quad (\alpha_i \in \mathsf{B},\ \alpha_0 \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p})$$

über K, *so ist* π^* *Primelement in dem Bewertungsring* B^* *von* K^*, *und es ist der Restklassenkörper* $\mathsf{B}/\mathfrak{p}$ *von* K *zu dem Restklassenkörper* $\mathsf{B}^*/\mathfrak{p}^*$ *von* K^* *kongruentisomorph.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Henselschen Resultaten [30]). Spezialisiert man in ihm K auf einen p-adisch bewerteten Körper, so erhält man das in der Einleitung erwähnte Resultat: *Ein Eisensteinscher Oberkörper n-ten Grades über einem p-adisch bewerteten perfekten Körper* K *ist bei Fortsetzung der ursprünglichen Bewertung diskret bewertet, perfekt und n-fach verzweigt und besitzt einen zu dem Restklassenkörper* $\mathfrak{R}$ *von* K *kongruentisomorphen Restklassenkörper.*

Von Satz 3 läßt sich aber mit einfachsten Hilfsmitteln auch bereits eine teilweise Umkehrung beweisen, nämlich:

Satz 4. *Ist* K^* *ein nichttrivial und ganzzahlig bewerteter perfekter Körper mit dem zugehörigen Restklassenkörper* $\mathfrak{R}$ *und* K *ein bewerteter perfekter Unterkörper mit zu* $\mathfrak{R}$ *kongruentisomorphem Restklassenkörper, so ist* K^* *ein Eisensteinscher Oberkörper über* K.

Seien nämlich wieder B und B^* die Bewertungsringe von K und K^*, π bzw. π^* die zu B und B^* gehörigen Primelemente. Da B^* ein Bewertungsring mit ganzzahliger

[30]) Vgl. etwa K. Hensel, Die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1913.

Bewertung ist, muß π bis auf eine Einheit ε mit einer Potenz des Primelements π^* übereinstimmen. Es besteht daher eine Gleichung $\pi = \varepsilon \pi^{*n}$.

Aus dieser Gleichung ergibt sich für π der Wert $w^*(\pi) = nw^*(\pi^*) = n$. Ein Potenzprodukt der Form $\pi^{*r} \pi^s$ hat daher den Wert $r + sn$, d. h. die Potenzprodukte $\{\pi^{*r} \pi^s\}$ stellen ein Repräsentantensystem für die Werte des ganzzahlig bewerteten Körpers K^* dar, wenn r die Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$, und s alle ganzen Zahlen durchläuft. Da der Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ von K^* nach Voraussetzung zu dem Restklassenkörper von K kongruentisomorph ist, kann man ferner bereits aus K ein Repräsentantensystem $\{\varrho\}$ für die Klassen von $\mathfrak{R}$ herausgreifen. Jedes Element α^* von K^* gestattet also eine Reihenentwicklung

$$\alpha^* = \varrho_1 \pi^{*r_1} \pi^{s_1} + \varrho_2 \pi^{*r_2} \pi^{s_2} + \cdots \quad \text{mit Koeffizienten } \varrho_i \text{ aus } \{\varrho\}.$$

Diese Reihe ordnen wir nun nach wachsenden Potenzen von π^* und beachten dabei, daß die r_i nur die Werte $0, 1, \ldots, n-1$ annehmen. Man erhält dann für das beliebige Element α^* von K^* eine Darstellung

$$\alpha^* = \alpha_0 + \alpha_1 \pi^* + \cdots + \alpha_{n-1} \pi^{*n-1}, \tag{4}$$

wo die α_i π-adische Reihen mit Koeffizienten aus dem in K liegenden Repräsentantensystem $\{\varrho\}$, also — weil K vollständig — Elemente aus K sind. Es ist folglich $\mathsf{K}^* = \mathsf{K}(\pi^*)$.

Wir müssen nur noch zeigen, daß π^* Wurzel einer Eisensteinschen Gleichung ist. Dazu gehen wir von der Beziehung $\pi^{*n} = \pi\varepsilon^*$ aus und wenden auf die Einheit ε^* die stets gültige Darstellung (4) an,

$$\varepsilon^* = \alpha_0 + \alpha_1 \pi^* + \cdots + \alpha_{n-1} \pi^{*n-1} \quad \text{mit } \alpha_i \in \mathsf{K}.$$

Hier haben die Summanden der rechten Seite wegen

$$w(\pi^*) = 1, \quad w^*(\alpha_i) = \text{Vielfaches von } n$$

lauter verschiedene Werte. Gemäß dem Summenpostulat der Bewertung ist also der Wert der ganzen rechten Seite gleich dem Minimum der Werte der einzelnen Summanden. Da andererseits $w^*(\varepsilon) = 0$ ist, muß notwendig $w^*(\alpha_0) = 0$ und $w^*(\alpha_i) \geqq 0$ sein. Man hat mithin für π^* die Relation

$$\pi^{*n} = \pi(\alpha_0 + \alpha_1 \pi^* + \cdots + \alpha_{n-1} \pi^{*n-1}) \quad \text{mit } \alpha_i \in \mathsf{B},\ \alpha_0 \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p},$$

d. h. π^* ist wirklich Wurzel einer Eisensteinschen Gleichung in bezug auf K.

Abschnitt II. Grundring und reduziertes Grundideal.

§ 4. Einführung von Grundring und reduziertem Grundideal. Der zugehörige Restklassenring.

1. Grundring. Sei Q ein Integritätsbereich der hinsichtlich eines Ideals $\mathfrak{N}$ gleichzeitig abgeschlossen und glatt transzendent ist. Das charakteristische Primelement π von Q teilt nach § 1, Nr. 4 jedes Element von Q in einer endlichen Potenz und erzeugt daher eine ganzzahlige Bewertung von Q. Diese ganzzahlige Bewertung legen wir in Q zugrunde. Wir behaupten:

Die vollständige Hülle $\overline{Q}$ von Q ist abgeschlossen hinsichtlich der vollständigen Hülle $\overline{\mathfrak{N}}$ des Ideals $\mathfrak{N}$; dabei ist $\overline{\mathfrak{N}} = \overline{Q}\mathfrak{N}$. Der Restklassenkörper $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{N}}$ ist zu $Q/\mathfrak{N}$ kongruentisomorph.

Jedes Element a von $\overline{Q}$ ist nämlich Grenzwert einer Folge a_n von Elementen aus Q. Liegt a dabei nicht in $\overline{\mathfrak{N}}$, so kann man es sicher als Grenzwert einer Folge von Elementen a_n aus Q darstellen, die sämtlich nicht in $\mathfrak{N}$ vorkommen und daher Einheiten in dem bezüglich $\mathfrak{N}$ abgeschlossenen Integritätsbereich Q sind. a ist dann als Grenzwert einer Einheitenfolge notwendig selbst Einheit, d. h. $\overline{Q}$ ist abgeschlossen bezüglich $\overline{\mathfrak{N}}$.

Das Primelement π, das die Bewertung von $\overline{Q}$ erzeugt, gehört nach § 1, Nr. 4 zu $\mathfrak{R}$. Nach § 3, Nr. 2 ist daher wirklich $\overline{\mathfrak{R}} = \overline{Q}\mathfrak{R}$, und aus § 2, Nr. 4 entnimmt man sofort, daß $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}}$ zu $Q/\mathfrak{R}$ kongruentisomorph ist.

Wir nennen nun die vollständige Hülle $\overline{Q}$ von Q einen *Grundring*, das Ideal $\overline{\mathfrak{R}}$, in bezug auf das $\overline{Q}$ abgeschlossen ist, das *Grundideal* von $\overline{Q}$, und das Primelement π, das nach § 3, Nr. 2 in $\overline{Q}$ Primelement geblieben ist, das *charakteristische Primelement* von $\overline{Q}$. $\overline{Q}$ heißt insbesondere ein maximaler Grundring, wenn Q maximal glatt bezüglich $\mathfrak{R}$ ist.

Da $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}}$ zu $Q/\mathfrak{R}$ kongruentisomorph ist, gilt für eine bezüglich $\mathfrak{R}$ glatte Transzendenzbasis U von Q offenbar: U besteht aus lauter mod. $\overline{\mathfrak{R}}$ inkongruenten Elementen, und es ist $\overline{Q}$ in der vollständigen Hülle des rein transzendenten Quotientenkörpers $P(U)$ enthalten. Wir bezeichnen U deshalb als eine (bezüglich $\overline{\mathfrak{R}}$) *glatte Hüllentranszendenzbasis* von $\overline{Q}$. Ist U bezüglich $\mathfrak{R}$ maximal glatt und folglich ein Repräsentantensystem auch für die Klassen von $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}}$, so sprechen wir von einer (bezüglich $\overline{\mathfrak{R}}$) *maximal glatten Hüllentranszendenzbasis* von $\overline{Q}$.

Infolge des Kongruenzisomorphismus zwischen $Q/\mathfrak{R}$ und $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}}$ folgt aus § 1, Nr. 4 sofort:

Es gibt einen maximalen Grundring $\overline{Q}$, dessen Restklassenkörper zu einem vorgegebenen Körper $\mathfrak{K}$ isomorph ist. Dabei kann die Charakteristik $\chi(\overline{Q})$ noch beliebig so vorgeschrieben werden, daß $\chi(\overline{Q})$ durch $\chi(\mathfrak{K})$ teilbar ist.

Wir greifen nun aus dem Grundring $\overline{Q}$ mit dem Grundideal $\overline{\mathfrak{R}}$ eine Menge von der Form $V = \{u^{e_u}\}$ heraus, wo u eine Teilmenge U' einer bezüglich $\overline{\mathfrak{R}}$ glatten Hüllentranszendenzbasis U durchlaufe und die e_u ganze Zahlen > 0 bedeuten. Sind alle $e_u = 1$, so stimmt also V mit der Teilmenge U' von U überein; sind allgemein alle $e_u = e$, so besteht $V = U'^e$ aus den e-ten Potenzen aller Elemente von U'. Die Menge V stellt offenbar stets ein System unabhängiger Transzendenten in bezug auf den Primintegritätsbereich P von $\overline{Q}$ dar. Aus V kann man daher stets in folgender Weise einen in $\overline{Q}$ enthaltenen Grundring aufbauen: Man bilde zunächst den Polynomring $J_V = P[V]$, gehe von ihm zu dem Quotientenring $Q_V = \frac{J_V}{S}$ über, wo S das multiplikativ abgeschlossene System aller durch $\overline{\mathfrak{R}}$ unteilbaren Polynome aus J_V bezeichnet, und von Q_V weiter zu seiner in $\overline{Q}$ enthaltenen vollständigen Hülle $\overline{Q}_V$. $\overline{Q}_V$ ist dann bezüglich $\overline{\mathfrak{R}}_V = \overline{\mathfrak{R}} \cap \overline{Q}_V$ abgeschlossen und V eine bezüglich $\overline{\mathfrak{R}}_V$ glatte Hüllentranszendenzbasis von $\overline{Q}_V$. $\overline{Q}_V$ heiße der *aus V in $\overline{Q}$ abgeleitete Grundring*. Für $V = U$ ist speziell $\overline{Q}_U = \overline{Q}$.

Den Grundring $\overline{Q}$ denken wir uns stets durch den Kongruenzhomomorphismus H auf seinen Restklassenkörper $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{L}$ abgebildet. Dabei geht der Grundring $\overline{Q}_V$ in einen Unterkörper $\mathfrak{L}_V$ von $\mathfrak{L}$ über, und zwar ist $\mathsf{H}(\overline{Q}_V) = \mathfrak{P}(\mathfrak{B}_V)$, wo $\mathfrak{P}$ der Primkörper von $\mathfrak{L}$ und $\mathsf{H}(V) = \mathfrak{B}_V$ die Bildmenge von V ist. Für $V = U$ gibt das speziell $\mathsf{H}(\overline{Q}) = \mathfrak{P}(\mathfrak{B})$ mit $\mathsf{H}(U) = \mathfrak{B}$. Das Ideal $\overline{\mathfrak{R}}$ besteht aus allen und nur den Elementen von $\overline{Q}$, die das H-Bild 0 besitzen.

2. Reduziertes Grundideal. Um den Begriff eines reduzierten Grundideals für den Grundring $\overline{Q}$ einzuführen, wählen wir in $\overline{Q}$ eine feste bezüglich des Grundideals $\overline{\mathfrak{R}}$ glatte Hüllentranszendenzbasis U aus. Ist dann $\mathsf{H}(U) = \mathfrak{B}$, also $\mathsf{H}(\overline{Q}) = \mathfrak{P}(\mathfrak{B})$, so wird durch H eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen den Mengen U und $\mathfrak{B}$ hervorgerufen.

Wir brauchen nun einen näheren Einblick in den algebraischen Aufbau von $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}(\mathfrak{B})$ über $\mathfrak{P}$, und legen zu diesem Zweck in $\mathfrak{B}$ eine feste Wohlordnung W zugrunde, $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \ldots \mathfrak{b}_\lambda, \ldots\}$, $\mathfrak{B}_\lambda =$ Abschnitt aller $\mathfrak{b}_{\lambda'}$ mit $\lambda' < \lambda$, $\nu =$ Ordnungszahl von $\mathfrak{B}$. Die Elemente $\mathfrak{b}_\lambda$ denken wir uns nacheinander zum Primkörper $\mathfrak{P}$ adjungiert und erhalten so eine wohlgeordnete aufsteigende Körperkette

$$\mathfrak{L}_0 \subseteq \mathfrak{L}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{L}_\lambda \subseteq \cdots,$$

wo $\mathfrak{L}_\lambda = \mathfrak{P}(\mathfrak{B}_\lambda)$ und $\mathfrak{L}_\nu = \mathfrak{L}$ ist. Das *durch* $\mathfrak{b}_\lambda$ *bei* W *annullierte irreduzible Polynom* $\mathfrak{G}_\lambda(x)$ wird dann folgendermaßen definiert: Ist $\mathfrak{b}_\lambda$ algebraisch bei W, also $\mathfrak{b}_\lambda$ bezüglich $\mathfrak{L}_\lambda$ algebraisch, so bezeichne $\mathfrak{G}_\lambda(x)$ das irreduzible Polynom mit Koeffizienten aus $\mathfrak{L}_\lambda$ und dem Einselement als höchstem Koeffizienten, dessen Nullstelle $\mathfrak{b}_\lambda$ ist; ist $\mathfrak{b}_\lambda$ bei W transzendent, also $\mathfrak{b}_\lambda$ bezüglich $\mathfrak{L}_\lambda$ transzendent, so werde $\mathfrak{G}_\lambda(x) = 0$ gesetzt.

Der Wohlordnung W von $\mathfrak{B}$ entspricht vermöge der durch H erzeugten umkehrbar eindeutigen Abbildung zwischen U und $\mathfrak{B}$ eine eindeutig bestimmte Wohlordnung von U, die wir ebenfalls mit W bezeichnen,

$U = \{u_0, u_1, \ldots u_\lambda, \ldots\}$, $U_\lambda =$ Abschnitt aller $u_{\lambda'}$ mit $\lambda' < \lambda$, $\nu =$ Ordnungszahl von U.

Dabei ist $\mathsf{H}(u_\lambda) = \mathfrak{b}_\lambda$, $\mathsf{H}(\mathrm{U}_\lambda) = \mathfrak{B}_\lambda$. Neben den Körper $\mathfrak{L}_\lambda = \mathfrak{P}(\mathfrak{B}_\lambda)$ tritt jetzt der in $\overline{Q}$ aus U_λ abgeleitete Grundring $\overline{Q}_\lambda$, für den $\mathsf{H}(\overline{Q}_\lambda) = \mathfrak{L}_\lambda$ ist; neben die aufsteigende Körperkette $\mathfrak{L}_\lambda$ tritt die aufsteigende Kette von Grundringen

$$\overline{Q}_0 \subseteq \overline{Q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \overline{Q}_\lambda \subseteq \cdots,$$

wo schließlich $\overline{Q}_\nu$ mit $\overline{Q}$ übereinstimmt. Zu dem durch $\mathfrak{b}_\lambda$ bei W annullierten irreduziblen Polynom $\mathfrak{G}_\lambda(x)$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{B}_\lambda$ suchen wir jeweils ein H-Urbildpolynom $G_\lambda(x)$ mit Koeffizienten aus $\overline{Q}_\lambda$ auf, und zwar habe $G_\lambda(x)$ ebenso wie $\mathfrak{G}_\lambda(x)$ das Einselement als höchsten Koeffizienten, wenn $\mathfrak{b}_\lambda$ bei W algebraisch ist, dagegen sei $G_\lambda(x) = 0$, wenn $\mathfrak{b}_\lambda$ bei W transzendent ist. Ein solches Polynom $G_\lambda(x)$ nennen wir ein *zu der durch* W *wohlgeordneten Basis* U *gehöriges Urbildpolynom* für $\mathfrak{b}_\lambda$, und denken es uns für jedes λ fest gewählt.

In $G_\lambda(x)$ ersetzen wir die Unbestimmte x nachträglich durch das H-Urbild u_λ von $\mathfrak{b}_\lambda$, so daß ein Element $G_\lambda(u_\lambda)$ von $\overline{Q}$ entsteht. Das vollständige Ideal $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ von $\overline{Q}_\lambda$, das aus dem System aller $G_{\lambda'}(u_{\lambda'})$ mit $\lambda' < \lambda$ als *Hüllenbasis* abgeleitet ist,

$$\overline{\mathfrak{M}}_\lambda = \langle G_0(u_0), G_1(u_1), \ldots G_{\lambda'}(u_{\lambda'}), \ldots\rangle \qquad (\lambda' < \lambda)$$

heiße ein *zu der durch* W *wohlgeordneten Hüllentranszendenzbasis* U_λ *gehöriges reduziertes Grundideal von* $\overline{Q}_\lambda$. Speziell ist $\overline{\mathfrak{M}}_\nu = \overline{\mathfrak{M}}$ ein *zu der durch* W *wohlgeordneten Hüllentranszendenzbasis* U *gehöriges reduziertes Grundideal von* $\overline{Q}$.

Da $\mathsf{H}(G_{\lambda'}(u_{\lambda'})) = \mathfrak{G}_{\lambda'}(\mathfrak{b}_{\lambda'}) = 0$ ist, liegt $G_{\lambda'}(u_{\lambda'})$, und somit $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$, sicher in dem Ideal $\overline{\mathfrak{N}}_\lambda = \overline{\mathfrak{N}} \frown \overline{Q}_\lambda$, das aus allen durch H auf die Null abgebildeten Elementen von $\overline{Q}_\lambda$ besteht. Da auch $\pi = \chi e$ zu $\overline{\mathfrak{N}}_\lambda$ gehört, ist also

$$(\overline{\mathfrak{M}}_\lambda, \pi) \subseteq \overline{\mathfrak{N}}_\lambda.$$

3. Der Restklassenring $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$. Wir betrachten nun den Restklassenring $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda = \overline{Q}_\lambda/\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ und bezeichnen die durch ein Element a von $\overline{Q}_\lambda$ mod. $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ bestimmte Klasse mit $\tilde{a}$. Wir werden zeigen:

Satz 5. *In* $\overline{Q}_\lambda$ *gilt die Gleichung* $\overline{\mathfrak{N}}_\lambda = (\overline{\mathfrak{M}}_\lambda, \pi)$. *Der Ring* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda = \overline{Q}_\lambda/\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ *ist ein vollständiger Bewertungsring und besitzt dieselbe Charakteristik wie* $\overline{Q}$.

Dieser Satz ist für unsere weiteren Überlegungen grundlegend. Zu seinem Inhalt

bemerken wir: Da nach der vorigen Nummer $(\overline{\mathfrak{M}}_\lambda, \pi) \leqq \overline{\mathfrak{N}}_\lambda$ ist, ist der iterierte Restklassenring $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda/\tilde{\pi}$ gemäß § 1, Nr. 2 sicher zu $\overline{Q}_\lambda/\overline{\mathfrak{N}}_\lambda = \mathfrak{L}_\lambda$ kongruenthomomorph, und dieser Kongruenzhomomorphismus ist dann und nur dann ein Isomorphismus, wenn $\overline{\mathfrak{N}}_\lambda = (\overline{\mathfrak{M}}_\lambda, \pi)$ ist. Bedenkt man noch, daß $\mathfrak{L}_\lambda$ ein Körper ist, so folgt aus Satz 5 sofort:

Zusatz. *$\tilde{\pi}$ ist ein Primelement des Bewertungsrings $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$, und der Restklassenkörper $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda/\tilde{\pi}$ ist isomorph zu $\mathfrak{L}_\lambda$.*

Der Beweis des Satzes 5 selbst verursacht prinzipiell keine Schwierigkeiten, ist jedoch in der Einzelausführung etwas mühsam. Wir führen ihn in naheliegender Weise durch vollständige Induktion nach λ.

Dabei knüpfen wir an den Aufbau der Grundringe $\overline{Q}_\lambda$ an, den wir uns schrittweise vollzogen denken. Sind nämlich die Ringe $\overline{Q}_\lambda$ für alle $\lambda < \mu$ bereits konstruiert, wo μ eine beliebige Ordnungszahl $\leqq \nu$ ist, so erhält man offenbar $\overline{Q}_\mu$

I. im Falle einer Nichtlimeszahl μ in drei Schritten, indem man

α) den Polynomring $Q'_\mu = \overline{Q}_{\mu-1}[u_{\mu-1}]$, dann

β) den bezüglich $\overline{\mathfrak{N}}$ abgeschlossenen Quotientenring Q_μ von Q'_μ und schließlich

γ) die vollständige Hülle $\overline{Q}_\mu$ von Q_μ bildet;

II. im Fall einer Limeszahl μ in zwei Schritten, indem man

α) die Vereinigungsmenge Q_μ aller Q_λ und

β) die vollständige Hülle $\overline{Q}_\mu$ von Q_μ herstellt.

Ganz entsprechend gewinnt man das Ideal $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ aus den $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ mit $\lambda < \mu$, indem man

I. im Fall einer Nichtlimeszahl zunächst

α) das Ideal $\mathfrak{M}'_\mu = (\overline{\mathfrak{M}}_{\mu-1}, G_{\mu-1}(u_{\mu-1}))$ von Q'_μ aufsucht, dann

β) das Ideal $\mathfrak{M}_\mu = Q_\mu \mathfrak{M}'_\mu$ von Q_μ und schließlich

γ) die vollständige Hülle $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ von $\mathfrak{M}_\mu$;

II. im Fall einer Limeszahl zunächst

α) zur Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}_\mu$ der einander umfassenden $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ übergeht, und dann

β) zur vollständigen Hülle $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ von $\mathfrak{M}_\mu$.

Wir setzen

$$\overline{\mathfrak{N}} \frown Q'_\mu = \mathfrak{N}'_\mu, \quad \overline{\mathfrak{N}} \frown Q_\mu = \mathfrak{N}_\mu,$$

so daß $\mathfrak{N}'_\mu$ bzw. $\mathfrak{N}_\mu$ aus allen Elementen von Q'_μ bzw. Q_μ bestehen, die bei dem Kongruenzhomomorphismus H in die Null übergehen. Es ist dann

$$\mathsf{H}(Q'_\mu) = \mathfrak{L}_{\mu-1}[\mathfrak{b}_{\mu-1}] = Q'_\mu/\mathfrak{N}'_\mu,$$

ferner

$$\mathfrak{N}_\mu = Q_\mu \mathfrak{N}'_\mu, \quad \overline{\mathfrak{N}}_\mu = \overline{Q}_\mu \mathfrak{N}_\mu,$$

und

$$(\mathfrak{M}'_\mu, \pi) \leqq \mathfrak{N}'_\mu.$$

Bevor wir den soeben angegebenen Aufbau von $\overline{Q}_\mu$ und $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ zum Beweis von Satz 5 ausnutzen, bereiten wir den eigentlichen Induktionsschluß im nächsten Paragraphen durch einige einfache Hilfssätze vor.

§ 5. Hilfssätze zum Beweis von Satz 5.

1. Die aus $\overline{Q}_\lambda[u_\lambda]$ entstehenden iterierten Restklassenringe. Wir gehen von dem Grundring $\overline{Q}_\lambda$ und dem reduzierten Grundideal $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ von $\overline{Q}_\lambda$ aus. Zu $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ bilden

wir das Erweiterungsideal $(\overline{\mathfrak{M}}_\lambda) = Q'_{\lambda+1}\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ in $Q'_{\lambda+1} = \overline{Q}_\lambda[u_\lambda]$. Dann ist jedenfalls $\overline{Q}_\lambda \subseteqq \overline{Q}_\lambda[u_\lambda]$ und $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda \subseteqq (\overline{\mathfrak{M}}_\lambda)$. Über den Aufbau des Restklassenrings $\overline{Q}_\lambda[u_\lambda]/(\overline{\mathfrak{M}}_\lambda)$ gilt, wie leicht ersichtlich:

Hilfssatz 1. *Diejenigen Klassen aus* $\overline{Q}_\lambda[u_\lambda]/(\overline{\mathfrak{M}}_\lambda)$, *die Erweiterungsklassen von Klassen aus* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda = \overline{Q}_\lambda/\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ *sind, stellen einen zu* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ *kongruentisomorphen Unterring dar. Kurz:* $\overline{Q}_\lambda[u_\lambda]/(\overline{\mathfrak{M}}_\lambda)$ *umfaßt* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$.

Es ist daher $\overline{Q}_\lambda[u_\lambda]/(\overline{\mathfrak{M}}_\lambda) = \widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(1)}]$, *und dabei ist die durch* u_λ *mod.* $(\overline{\mathfrak{M}}_\lambda)$ *bestimmte Klasse erster Stufe* $\tilde{u}_\lambda^{(1)}$ *transzendent bezüglich* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$.

Gemäß Hilfssatz 1 geht das Polynom $G_\lambda(u_\lambda)$ von $\overline{Q}_\lambda[u_\lambda]$ mod. $(\overline{\mathfrak{M}}_\lambda)$ in ein Polynom $\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ mit Koeffizienten aus $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ über. Wir betrachten nun $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(1)}]$ mod. $\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ und erhalten so den Restklassenring zweiter Stufe $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(1)}]/\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$, der nach § 1, Nr. 2 zu $\overline{Q}_\lambda[u_\lambda]/\big(\overline{\mathfrak{M}}_\lambda, G_\lambda(u_\lambda)\big) = Q'_{\lambda+1}/\mathfrak{M}'_{\lambda+1}$ kongruentisomorph ist.

Auch der Aufbau des Ringes $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_n^{(1)}]/\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ läßt sich leicht bestimmen. Da nämlich $\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ gemäß der Wahl von $G_\lambda(u_\lambda)$ entweder gleich $\tilde{0}$ oder ein Polynom vom Grad $n \geqq 1$ in $\tilde{u}_\lambda^{(1)}$ ist, ist sicher keine Klasse aus $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ außer der Nullklasse in $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(1)}]$ durch $\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ teilbar. Das besagt:

Hilfssatz 2. *Diejenigen Klassen zweiter Stufe aus* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(1)}]/\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$, *die Klassen aus* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ *enthalten, bilden einen zu* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ *kongruentisomorphen Unterring. Kurz:* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(1)}]/\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ *umfaßt* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$.

Es ist daher $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(1)}]/\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)}) = \widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]$, *und dabei ist die durch* u_λ *bestimmte Klasse zweiter Stufe* $\tilde{u}_\lambda^{(2)}$ *transzendent oder algebraisch bezüglich* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$, *je nachdem* $G_\lambda(u_\lambda)$ *gleich* 0 *oder von Null verschieden ist.*

In dem Ring $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}^{(2)}_\lambda]$ legen wir nun weiter die Kongruenz nach $\tilde{\pi}=\tilde{\pi}^{(2)}$ als Gleichheit zu Grunde und gewinnen so den Restklassenring dritter Stufe $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]/\tilde{\pi}$, der nach § 1, Nr. 2 zu $\overline{Q}_\lambda[u_\lambda]/\big(\mathfrak{M}_\lambda, G_\lambda(u_\lambda), \pi\big) = Q'_{\lambda+1}/(\mathfrak{M}'_{\lambda+1}, \pi)$ kongruentisomorph ist. Über den Aufbau von $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]/\tilde{\pi}$ und das arithmetische Verhalten von $\tilde{\pi}$ in $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]$ zeigen wir:

Hilfssatz 3. *Diejenigen Klassen von* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]/\tilde{\pi}$ *die Klassen von* $\widetilde{L}_\lambda = \widetilde{\overline{Q}}_\lambda/\tilde{\pi}$ *enthalten, bilden einen zu* $\widetilde{L}_\lambda$ *kongruentisomorphen Unterring. Kurz:* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]/\tilde{\pi}$ *umfaßt* $\widetilde{L}_\lambda$, *und es ist daher* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]/\tilde{\pi} = \widetilde{L}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(3)}]$.

Ist jede von der Nullklasse verschiedene Klasse aus $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ *nur durch eine endliche Potenz von* $\tilde{\pi}$ *teilbar, so ist auch jede von der Nullklasse verschiedene Klasse aus* $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]$ *nur durch eine endliche Potenz von* $\tilde{\pi}$ *teilbar.*

Da nämlich $\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ entweder gleich $\tilde{0}$ oder ein Polynom vom Grade $n \geqq 1$ in $\tilde{u}_\lambda^{(1)}$ und mit dem Einselement als höchstem Koeffizienten ist, kann jede Klasse $\tilde{a}^{(2)}$ von $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}] = \widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(1)}]/\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ auf eine und nur eine Weise dargestellt werden in der Form

$$\tilde{a}^{(2)} = \sum_{h=0}^{z} \tilde{c}_h\, \tilde{u}^{(2)h} \qquad (\tilde{c}_h \text{ aus } \widetilde{\overline{Q}}_\lambda), \tag{4}$$

wobei der Schlußindex z der Summation der folgenden Vorschrift unterworfen ist: Ist $\widetilde{G}(\tilde{u}^{(1)}) = 0$, so ist $z = \infty$, und es sind nur endlich viele $\tilde{c}_h \neq \tilde{0}$; ist $\widetilde{G}(\tilde{u}^{(1)}) \neq \tilde{0}$, so ist z um 1 kleiner als der Grad von $\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$, also $z = n - 1$.

Ist nun $\tilde{a}^{(2)}$ in $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]$ durch $\tilde{\pi}^e$ teilbar, so gibt es offenbar eine Klasse

$$\tilde{b}^{(2)} = \sum_{h=0}^{z} \tilde{d}_h \tilde{u}^{(2)h} \qquad (\tilde{d}_h \text{ aus } \widetilde{\overline{Q}}_\lambda)$$

der Art, daß die Relation

$$\tilde{a}^{(2)} = \tilde{\pi}^e \, \tilde{b}^{(2)}$$

besteht. Aus den Gleichungen

$$\tilde{a}^{(2)} = \sum_{h=0}^{z} \tilde{c}_h \, \tilde{u}^{(2)h} = \sum_{h=0}^{z} \tilde{\pi}^e \, \tilde{d}_h \, \tilde{u}^{(2)h}$$

folgt dann wegen der Eindeutigkeit der Darstellung sofort

$$\tilde{c}_h = \tilde{\pi}^e \, \tilde{d}_h \tag{5}$$

für jedes $h \leqq z$; d. h. $\tilde{a}^{(2)}$ ist nur dann in $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]$ durch $\tilde{\pi}^e$ teilbar, wenn die in $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ gelegenen Koeffizienten der Darstellung (4) bereits in $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ durch $\tilde{\pi}^e$ teilbar sind. Falls also jede Klasse aus $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ nur durch eine endliche Potenz von $\tilde{\pi}$ teilbar ist, gilt dasselbe sicher von jeder Klasse aus $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}^{(2)}]$.

Verschwinden in (4) alle $\tilde{c}_h$ mit $h > 0$, ist also $\tilde{a}^{(2)} = \tilde{c}_0$ eine Klasse aus $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$, so verschwinden nach (5) auch alle $\tilde{d}_h$ mit $h > 0$ und $\tilde{b}^{(2)} = \tilde{d}_0$ ist ebenfalls eine Klasse aus $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$. Für $e = 1$ besagt das: Eine Klasse $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ ist nur dann in $\widetilde{\overline{Q}}[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]$ durch $\tilde{\pi}$ teilbar, wenn sie bereits in $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ selbst durch $\tilde{\pi}$ teilbar ist. Nach § 1, Nr. 1 ist daher $\widetilde{L}_\lambda = \widetilde{\overline{Q}}_\lambda/\tilde{\pi}$ zu dem Ring seiner Erweiterungsklassen in $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]/\tilde{\pi}$ kongruentisomorph; m. a. W. $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]/\tilde{\pi}$ umfaßt $\widetilde{L}_\lambda$.

2. Arithmetische Eigenschaften von $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]$. Nimmt man über den Ring $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ noch mehr als bekannt an, so lassen sich die arithmetischen Eigenschaften von $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]$ genauer bestimmen. Wir behaupten nämlich:

Hilfssatz 4. *Gilt in $\overline{Q}_\lambda$ die Gleichung $\mathfrak{N}_\lambda = (\mathfrak{M}_\lambda, \pi)$ und ist $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ ein Bewertungsring mit dem Primelement $\tilde{\pi}$, so gilt auch in $Q'_{\lambda+1} = \overline{Q}_\lambda[u_\lambda]$ die Gleichung $\mathfrak{N}'_{\lambda+1} = (\mathfrak{M}'_{\lambda+1}, \pi)$ und der iterierte Restklassenring $\widetilde{Q}'_{\lambda+1} = \widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]$ hat folgende Eigenschaften:*

a) *Er ist ein Integritätsbereich.*

b) *$\tilde{\pi}$ ist Primelement in $\widetilde{Q}'_{\lambda+1}$, und jede Klasse ist nur durch eine endliche Potenz von $\tilde{\pi}$ teilbar.*

Zum Beweis dieses Hilfssatzes bemerken wir vorweg: Infolge der Beziehungen $(\mathfrak{M}'_{\lambda+1}, \pi) \leqq \mathfrak{N}'_{\lambda+1}$ ist der iterierte Restklassenring $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]/\tilde{\pi}$ nach § 1, Nr. 2 zu $Q'_{\lambda+1}/\mathfrak{N}'_{\lambda+1} = \mathfrak{L}_\lambda[\mathfrak{b}_\lambda]$ kongruenthomomorph und die Gleichung $\mathfrak{N}'_{\lambda+1} = (\mathfrak{M}'_{\lambda+1}, \pi)$ ist gleichwertig damit, daß dieser Kongruenzhomomorphismus ein Isomorphismus ist.

Wir begründen nun die Aussagen a) und b) nacheinander und verbinden mit b) den Beweis der Gleichung $\mathfrak{N}'_{\lambda+1} = (\mathfrak{M}'_{\lambda+1}, \pi)$.

a) Nach Voraussetzung ist $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ ein Integritätsbereich, folglich nach Hilfssatz 1 auch der Polynomring $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(1)}]$ ein Integritätsbereich. Wir wollen überlegen, daß das Polynom $\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ stets ein Primpolynom von $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(1)}]$ ist.

Im Fall $\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)}) = 0$ ist dies selbstverständlich. Ist dagegen $\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)}) \neq 0$, so muß $\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ zunächst sicher unzerlegbar sein. Einmal kann nämlich von $\widetilde{G}_\lambda(x)$ als einem Polynom

mit dem Einselement als höchstem Koeffizienten sicher kein Element aus $\overline{\overline{Q}}_\lambda$ abgespalten werden. Andererseits ist auch eine Gleichung $\widetilde{G}_\lambda(x) = \widetilde{F}(x)\,\widetilde{H}(x)$ über $\overline{\overline{Q}}_\lambda$ mit Faktoren von mindestens erstem Grade unmöglich, denn ihr würde vermittels des Kongruenzhomomorphismus von $\overline{\overline{Q}}_\lambda = \overline{Q}_\lambda/\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ auf $\mathfrak{L}_\lambda = \overline{Q}_\lambda/\overline{\mathfrak{N}}_\lambda$ die Gleichung $\mathfrak{G}_\lambda(x) = \mathfrak{F}_\lambda(x)\,\mathfrak{H}_\lambda(x)$ über $\mathfrak{L}_\lambda$ mit Faktoren von mindestens erstem Grade folgen, was gegen die vorausgesetzte Irreduzibilität von $\mathfrak{G}_\lambda(x)$ über $\mathfrak{L}_\lambda$ verstößt. Da über $\overline{\overline{Q}}_\lambda$ als Bewertungsring der Gaußsche Satz gilt, zieht die Unzerlegbarkeit von $\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ die Primelementeigenschaft nach sich. $\overline{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}] = \overline{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(1)}]/\widetilde{G}_\lambda(\tilde{u}_\lambda^{(1)})$ ist also tatsächlich stets ein Integritätsbereich.

b) In dem Bewertungsring $\overline{\overline{Q}}_\lambda$ mit dem Primelement $\tilde{\pi}$ ist sicher jede von der Nullklasse verschiedene Klasse nur durch eine endliche Potenz von $\tilde{\pi}$ teilbar. Hilfssatz 3 ergibt daher sofort die Tatsache, daß jede von der Nullklasse verschiedene Klasse von $\overline{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]$ nur durch eine endliche Potenz von $\tilde{\pi}$ teilbar ist.

Da ferner in $\overline{Q}_\lambda$ nach Voraussetzung die Gleichung $\overline{\mathfrak{N}}_\lambda = (\overline{\mathfrak{M}}_\lambda, \pi)$ gilt, ist der Kongruenzhomomorphismus von $\widetilde{L}_\lambda = \overline{\overline{Q}}_\lambda/\tilde{\pi}$ auf $\mathfrak{L}_\lambda$ ein Isomorphismus. Wenn wir nun zeigen, daß der Kongruenzhomomorphismus von $\widetilde{L}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(3)}] = \overline{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}^{(2)}]/\tilde{\pi}$ auf $\mathfrak{L}_\lambda[\mathfrak{b}_\lambda]$ ebenfalls ein Isomorphismus ist, so folgt daraus erstens, daß $\overline{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]/\tilde{\pi}$ einen Integritätsbereich, also ein $\tilde{\pi}$ Primelement von $\overline{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]$ darstellt, und zweitens, daß auch in $Q'_{\lambda+1} = \overline{Q}_\lambda[u_\lambda]$ die Gleichung $\mathfrak{N}'_{\lambda+1} = (\mathfrak{M}'_{\lambda+1}, \pi)$ besteht.

Der Kongruenzhomomorphismus von $\widetilde{L}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(3)}] = \overline{\overline{Q}}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(2)}]/\tilde{\pi}$ auf $\mathfrak{L}_\lambda[\mathfrak{b}_\lambda]$ ist bestimmt durch die Zuordnung

$$\tilde{\tilde{b}} \to \mathsf{H}(b) = \mathfrak{b} \tag{6}$$

für jede durch ein Element b von $\overline{Q}_\lambda$ erzeugte Klasse $\tilde{\tilde{b}}$ aus $\widetilde{L}_\lambda$ und die Zuordnung

$$\tilde{u}_\lambda^{(3)} \to \mathsf{H}(u_\lambda) = \mathfrak{b}_\lambda \tag{7}$$

für $\tilde{u}_\lambda^{(3)}$. Die Zuordnung (6) stellt gerade den Kongruenzisomorphismus von $\widetilde{L}_\lambda$ auf $\mathfrak{L}_\lambda$ dar. Von der Klasse $\tilde{u}_\lambda^{(3)}$ kann man sagen, daß sie in bezug auf $\widetilde{\mathfrak{L}}_\lambda$ in jedem Fall als Nullstelle des Polynoms $\widetilde{\overline{G}}_\lambda(x)$ definiert ist, das aus $\widetilde{G}_\lambda(x)$ hervorgeht, wenn man die Koeffizienten durch die von ihnen bestimmten Klassen mod. $\tilde{\pi}$ ersetzt. Diese Aussage behält nämlich offenbar auch dann einen Sinn, wenn $\widetilde{G}_\lambda(x)$ gleich 0 ist. Bei dem Kongruenzisomorphismus (6) geht $\widetilde{\overline{G}}_\lambda(x)$ in das über $\mathfrak{L}_\lambda$ irreduzible Polynom $\mathfrak{G}_\lambda(x)$ über, dessen Nullstelle $\mathfrak{b}_\lambda$ ist. Durch (7) werden also die Nullstellen zweier bei dem Kongruenzisomorphismus (6) einander entsprechender irreduzibler Polynome zugeordnet. (6) und (7) zusammen bilden daher wirklich einen Isomorphismus von $\widetilde{L}_\lambda[\tilde{u}_\lambda^{(3)}]$ auf $\mathfrak{L}_\lambda[\mathfrak{b}_\lambda]$.

§ 6. Beweis von Satz 5. Folgerungen.

1. Durchführung des Beweises. Wir beweisen nun Satz 5 durch vollständige Induktion und verbinden damit aus beweistechnischen Gründen zugleich die Herleitung des nachstehenden Umfassungssatzes:

Satz 6. *Jedes $\overline{\overline{Q}}_\lambda$ umfaßt alle $\overline{\overline{Q}}_{\lambda'}$ mit $\lambda' < \lambda$. Oder, was damit gleichbedeutend ist: Es ist $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda \frown \overline{Q}_{\lambda'} = \overline{\mathfrak{M}}_{\lambda'}$.*

Auf Grund von Satz 6 genügt es offenbar, die in Satz 5 behauptete Übereinstimmung

der Charakteristiken $\chi(\overline{\overline{Q}}_\lambda)$ und $\chi(\overline{Q})$ nur für $\lambda = 0$ zu beweisen; für jedes $\lambda > 0$ folgt sie dann nämlich aus Satz 6.

Daß Satz 5 für $\lambda = 0$ richtig ist, erkennt man sofort aus der Bedeutung von $\mathfrak{L}_0$, $\overline{Q}_0$, $\overline{\mathfrak{R}}_0$ und $\overline{\mathfrak{M}}_0$. Die Menge $\mathfrak{B}_0$ der dem ersten Element $\mathfrak{b}_0$ von $\mathfrak{L}$ vorangehenden Elemente ist nämlich leer, also $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{P}(\mathfrak{B}_0) = \mathfrak{P}$ = Primkörper von $\mathfrak{L}$. Ebenso ist U_0 leer und folglich $P[U_0] = P$ = Primintegritätsbereich von $\overline{Q}$. Der Kongruenzhomomorphismus H bildet P auf $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{P}$ ab und dabei gehen alle und nur die durch das charakteristische Primelement π teilbaren Elemente von P in die Null über, $\overline{\mathfrak{R}} \frown P = (\pi)$. Der bezüglich $\mathfrak{R}$ abgeschlossene Quotientenring Q_0 von P entsteht daher, indem man die durch π unteilbaren Elemente in die Nenner nimmt. Er ist ein Bewertungsring mit dem Primelement π, seine vollständige Hülle $\overline{Q}_0$ mithin ein vollständiger Bewertungsring. Schließlich ist $\overline{\mathfrak{R}}_0 = \overline{Q}_0(\overline{\mathfrak{R}} \frown P) = \overline{Q}\pi$.

Da $\overline{\mathfrak{M}}_0$ das Nullideal ist, ist also wirklich $\overline{\mathfrak{R}}_0 = (\overline{\mathfrak{M}}_0, \pi)$. Es ist ferner $\overline{\overline{Q}}_0 = \overline{Q}_0/\overline{\mathfrak{M}}_0 = \overline{Q}_0/0$ isomorph zu $\overline{Q}_0$, d. h. $\overline{\overline{Q}}_0$ ist tatsächlich ein zu $\overline{Q}$ charakteristikgleicher vollständiger Bewertungsring.

Satz 6 ist für $\lambda = 0$ inhaltslos, so daß sich ein Beweis überhaupt erübrigt.

Wir nehmen nun an, Satz 5, folglich auch der aus ihm sich ergebende Zusatz, und ebenso Satz 6 seien bereits für alle $\lambda < \mu$ bewiesen, wo μ eine beliebige Ordnungszahl $\leqq \nu$ bedeutet und zeigen, daß sie dann auch für $\lambda = \mu$ gelten. Dabei unterscheiden wir I. den Fall einer Nichtlimeszahl μ und II. den Fall einer Limeszahl μ.

I. μ ist Nichtlimeszahl. μ besitzt also einen unmittelbaren Vorgänger $\mu - 1$ und nach Induktionsannahme sind die Sätze 5 und 6 für $\mu - 1$ richtig. Wir steigen dann von $\overline{Q}_{\mu-1}$ und $\overline{\overline{Q}}_{\mu-1}$ zu $\overline{Q}_\mu$ und $\overline{\overline{Q}}_\mu$ auf und schließen uns dabei der in § 4, Nr. 3 angegebenen Konstruktion von $\overline{Q}_\mu$ und $\overline{\overline{Q}}_\mu$ in den drei Schritten $\alpha) - \gamma)$ an.

α) *In dem Polynomring* $Q'_\mu = \overline{Q}_{\mu-1}\,[u_{\mu-1}]$ *gilt die Gleichung* $\mathfrak{R}'_\mu = (\mathfrak{M}'_\mu, \pi)$. *Der Ring* $\widetilde{Q}'_\mu = Q'_\mu/\mathfrak{M}'_\mu$ *umfaßt* $\overline{\overline{Q}}_{\mu-1}$ *und besitzt die Eigenschaften* a) *und* b) *des Hilfssatzes* 4.

Setzt man in Hilfssatz 4 $\lambda = \mu - 1$, so sind die dortigen Voraussetzungen gemäß unserer Induktionsannahme erfüllt. Die Behauptung α) folgt daher unmittelbar aus Hilfssatz 4, wenn man noch bedenkt, daß der in α) genannte Restklassenring $\widetilde{Q}'_\mu = Q_{\mu-1}[u_{\mu-1}]/(\overline{\mathfrak{M}}_{\mu-1}, G_{\mu-1}(u_{\mu-1}))$ zu dem in Hilfssatz 4 auftretenden iterierten Restklassenring $\overline{\overline{Q}}_{\mu-1}\,[\tilde{u}^{(2)}_{\mu-1}] = \overline{\overline{Q}}_{\mu-1}\,[\tilde{u}^{(1)}_{\mu-1}]/\widetilde{G}_{\mu-1}\,[\tilde{u}^{(1)}_{\mu-1}]$ kongruentisomorph ist.

β) *In dem Quotientenring* Q_μ *gilt ebenfalls die Gleichung* $\mathfrak{R}_\mu = (\mathfrak{M}_\mu, \pi)$. *Der Ring* $\widetilde{Q}_\mu = Q_\mu/\mathfrak{M}_\mu$ *umfaßt* $\widetilde{Q}'_\mu$ *und ist ein Bewertungsring mit dem Primelement* $\tilde{\pi}$.

Da $\mathfrak{R}_\mu = Q_\mu \mathfrak{R}'_\mu$ und $\mathfrak{M}_\mu = Q_\mu \mathfrak{M}'_\mu$ ist, ergibt sich aus der in α) bewiesenen Gleichung $\mathfrak{R}'_\mu = (\mathfrak{M}'_\mu, \pi)$ sofort $\mathfrak{R}_\mu = (\mathfrak{M}_\mu, \pi)$.

Der Quotientenring Q_μ entsteht aus Q'_μ, indem man das System S' der durch $\mathfrak{R}'_\mu$ unteilbaren Elemente in die Nenner nimmt, $Q_\mu = \frac{Q'_\mu}{S'}$. Der Kongruenzhomomorphismus von Q'_μ auf $\widetilde{Q}'_\mu = Q'_\mu/\mathfrak{M}'_\mu$ bildet diese Menge S' infolge der Gleichung $\mathfrak{R}'_\mu = (\mathfrak{M}'_\mu, \pi)$ auf die Menge $\widetilde{S}'$ der durch $\tilde{\pi}$ unteilbaren Klassen von $\widetilde{Q}'_\mu$ ab und läßt sich daher nach § 1, Nr. 3 zu einem Homomorphismus von $Q_\mu = \frac{Q'_\mu}{S'}$ auf $\frac{\widetilde{Q}'_\mu}{\widetilde{S}'}$ fortsetzen. Dabei ist $\mathfrak{M}_\mu = Q_\mu \mathfrak{M}'_\mu$ das Ideal aller Elemente aus Q_μ, die durch diese Fortsetzung in die Null über-

geführt werden. Die Ringe $\widetilde{Q}_\mu = Q_\mu/\mathfrak{M}_\mu$ und $\frac{\widetilde{Q}'_\mu}{\widetilde{S}'}$ können also nach § 1, Nr. 3 als äquivalente Erweiterungen des gemeinsamen Unterrings $\widetilde{Q}'_\mu$ aufgefaßt werden, d. h. $\widetilde{Q}_\mu$ umfaßt sicher $\widetilde{Q}'_\mu$.

Beim Übergang von $\widetilde{Q}'_\mu$ zu dem Quotientenring $\frac{\widetilde{Q}'_\mu}{\widetilde{S}'}$ bleiben die Eigenschaften a) und b) des Hilfssatzes 4 erhalten. $\frac{\widetilde{Q}'_\mu}{\widetilde{S}'}$ ist nämlich wieder ein Integritätsbereich; $\tilde{\pi}$ teilt jede seiner Klassen nur in einer endlichen Potenz und ist nach wie vor Primelement geblieben.

Darüber hinaus ist aber c) in $\frac{\widetilde{Q}'_\mu}{\widetilde{S}'}$ jede durch $\tilde{\pi}$ unteilbare Klasse Einheit, weil jede solche Klasse in dem Nennersystem $\widetilde{S}'$ vorkommt. Aus den Eigenschaften a)—c) folgt nach § 3, Nr. 1, daß $\frac{\widetilde{Q}'_\mu}{\widetilde{S}'}$ ein Bewertungsring mit dem Primelement $\tilde{\pi}$ ist, und dasselbe gilt mithin von dem zu $\frac{\widetilde{Q}'_\mu}{\widetilde{S}'}$ über $\widetilde{Q}'_\mu$ äquivalenten $\widetilde{Q}_\mu$.

γ) In der vollständigen Hülle $\overline{Q}_\mu$ besteht wiederum die Gleichung $\overline{\mathfrak{N}}_\mu = (\overline{\mathfrak{M}}_\mu, \pi)$. Der Ring $\overline{\widetilde{Q}}_\mu = \overline{Q}_\mu/\overline{\mathfrak{M}}$ umfaßt $\widetilde{Q}_\mu$ und ist ein vollständiger Bewertungsring.

Aus der Gleichung $\mathfrak{N}_\mu = (\mathfrak{M}_\mu, \pi)$ folgt wegen $\overline{\mathfrak{N}}_\mu = \overline{Q}_\mu \mathfrak{N}_\mu$ und $\overline{\mathfrak{M}}_\mu \geqq \overline{Q}_\mu \mathfrak{M}_\mu$ die Beziehung $\overline{\mathfrak{N}}_\mu = (\overline{Q}_\mu \mathfrak{M}_\mu, \pi) \leqq (\overline{\mathfrak{M}}_\mu, \pi)$. Da nach § 4, Nr. 3 umgekehrt auch $(\overline{\mathfrak{M}}_\mu, \pi) \leqq \overline{\mathfrak{N}}_\mu$ ist, hat man wirklich $\overline{\mathfrak{N}}_\mu = (\overline{\mathfrak{M}}_\mu, \pi)$.

Bei dem Kongruenzhomomorphismus von Q_μ auf $\widetilde{Q}_\mu = Q_\mu/\mathfrak{M}_\mu$ geht π in $\tilde{\pi}$ über. Dieser Kongruenzhomomorphismus ist daher umkehrbar stetig, falls man in Q_μ die durch das charakteristische Primelement π erzeugte Bewertung und in dem Bewertungsring $\widetilde{Q}_\mu$ seine zugehörige, durch $\tilde{\pi}$ erzeugte Bewertung zugrunde legt. Nach § 2, Nr. 3 kann der Kongruenzhomomorphismus dann zu einem stetigen Homomorphismus der vollständigen Hülle $\overline{Q}_\mu$ auf die vollständige Hülle $\overline{\widetilde{Q}}_\mu$ fortgesetzt werden, und dabei ist $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ das Ideal aller Elemente aus $\overline{Q}_\mu$, die durch diese Fortsetzung in die Null übergeführt werden. Die Ringe $\overline{\widetilde{Q}}_\mu = \overline{Q}_\mu/\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ und $\overline{\widetilde{Q}}$ stellen also nach § 1, Nr. 3 äquivalente Erweiterungen des gemeinsamen Unterrings $\widetilde{Q}_\mu$ dar, d. h. $\overline{\widetilde{Q}}_\mu$ umfaßt sicher $\widetilde{Q}_\mu$.

$\overline{\widetilde{Q}}_\mu$ ist als vollständige Hülle eines Bewertungsrings notwendig selbst ein vollständiger Bewertungsring und das gleiche gilt mithin für den zu $\overline{\widetilde{Q}}_\mu$ äquivalenten Ring $\overline{\widetilde{Q}}_\mu$.

Im Falle einer Nichtlimeszahl μ ist damit Satz 5 und zugleich auch Satz 6 für $\lambda = \mu$ als richtig erkannt, denn der in $\overline{\widetilde{Q}}_\mu$ enthaltene Ring $\widetilde{Q}_\mu$ umfaßt seinerseits nach β) und α) den Ring $\overline{\widetilde{Q}}_{\mu-1}$ und damit nach Induktionsvoraussetzung alle $\overline{\widetilde{Q}}_{\lambda'}$ mit $\lambda' < \mu$.

II. μ ist Limeszahl. In diesem Fall gehen wir im Anschluß an § 4 in zwei Schritten vor, und zwar bilden wir zunächst α) die Vereinigungsmenge Q_μ aller $\overline{Q}_\lambda$ mit $\lambda < \mu$ und die Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}_\mu$ aller $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ mit $\lambda < \mu$, dann β) die vollständige Hülle $\overline{Q}_\mu$ bzw. $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ von Q_μ bzw. $\mathfrak{M}_\mu$.

α) In Q_μ besteht die Gleichung $\mathfrak{N}_\mu = (\mathfrak{M}_\mu, \pi)$. $\widetilde{Q}_\mu = Q_\mu/\mathfrak{M}_\mu$ umfaßt jedes $\overline{\widetilde{Q}}_{\lambda'}$ mit $\lambda' < \mu$ und ist ein Bewertungsring mit dem zugehörigen Primelement $\tilde{\pi}$.

Da nämlich nach Induktionsvoraussetzung für jedes $\lambda < \mu$ sicher $\overline{\mathfrak{N}}_\lambda = (\overline{\mathfrak{M}}_\lambda, \pi)$ ist, so folgt die Gleichung $\mathfrak{N}_\mu = (\mathfrak{M}_\mu, \pi)$ sofort aus den Beziehungen

$\mathfrak{N}_\mu =$ Vereinigungsmenge aller $\overline{\mathfrak{N}}_\lambda$, $\quad \mathfrak{M}_\mu =$ Vereinigungsmenge aller $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$.

Um zu zeigen, daß $\widetilde{Q}_\mu$ jedes $\widetilde{\overline{Q}}_{\lambda'}$ umfaßt, bestätigen wir die Relation $\mathfrak{M}_\mu \frown \overline{Q}_{\lambda'} = \overline{\mathfrak{M}}_{\lambda'}$ für jedes $\lambda' < \mu$. Zunächst ist sicher $\mathfrak{M}_\mu \frown \overline{Q}_{\lambda'} \geqq \overline{\mathfrak{M}}_{\lambda'}$. Enthielte nun $\mathfrak{M}_\mu \frown \overline{Q}_{\lambda'}$ ein nicht zu $\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda'}$ gehöriges Element, so müßte dies Element gemäß der Entstehung von $\mathfrak{M}_\mu$ aus den $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ bereits in einem $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ liegen, dessen Index λ der Bedingung $\lambda' < \lambda < \mu$ genügt. Das betreffende Element befände sich daher auch in dem Durchschnitt $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda \frown \overline{Q}_{\lambda'}$, d. h. es wäre $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda \frown \overline{Q}_{\lambda'} > \overline{\mathfrak{M}}_{\lambda'}$ entgegen der Induktionsannahme, wonach Satz 6 bereits für alle $\lambda < \mu$ als richtig erkannt ist. Es ist daher wirklich $\mathfrak{M}_\mu \frown \overline{Q}_{\lambda'} = \overline{\mathfrak{M}}_{\lambda'}$.

Da Q_μ nach Definition gleich der Vereinigungsmenge der $\overline{Q}_\lambda$ ist und $\widetilde{Q}_\mu = Q_\mu/\mathfrak{M}_\mu$ nach dem eben auseinandergesetzten jedes $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda = \overline{Q}_\lambda/\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ umfaßt, so kann $\widetilde{Q}_\mu$ offenbar als Vereinigungsmenge der aufsteigenden Menge der $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ aufgefaßt werden. Nach § 3, Nr. 1 ist $\widetilde{Q}_\mu$ also tatsächlich ein Bewertungsring mit dem Primelement $\tilde{\pi}$; denn jedes $\widetilde{\overline{Q}}_\lambda$ ist nach Induktionsannahme ein Bewertungsring mit dem Primelement $\tilde{\pi}$.

Nachdem die Behauptung α) völlig bewiesen ist, steigt man nun von $\widetilde{Q}_\mu$ ganz entsprechend wie unter I γ) zu $\widetilde{\overline{Q}}_\mu$ auf und findet

β) *In $\overline{Q}_\mu$ besteht die Gleichung $\overline{\mathfrak{N}}_\mu = (\overline{\mathfrak{M}}_\mu, \pi)$. $\widetilde{\overline{Q}}_\mu$ umfaßt $\widetilde{Q}_\mu$ und ist ein vollständiger Bewertungsring.*

Mit diesem letzten Schritt ist dann der Beweis der Sätze 5 und 6 völlig erbracht.

2. Folgerungen. Im Anschluß an Satz 5 definieren wir nun: Ein Ideal $\overline{\mathfrak{M}}$ des Grundrings $\overline{Q}$ heiße ganz allgemein ein *reduziertes Grundideal*, wenn $\overline{\mathfrak{N}} = (\overline{\mathfrak{M}}, \pi)$ und $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ ein mit $\overline{Q}$ charakteristikgleicher vollständiger Bewertungsring ist. Wie in § 4, Nr. 3 ergibt sich dann sofort, daß $\tilde{\pi}$ stets ein Primelement des Bewertungsrings $\widetilde{\overline{Q}} = \overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ und $\widetilde{\overline{Q}}/\tilde{\pi}$ zum Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ von $\overline{Q}$ isomorph ist. Die Existenz mindestens eines reduzierten Grundideals $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\overline{Q}$ ist durch die Konstruktion in § 4, Nr. 2 und durch den soeben bewiesenen Satz 5 gewährleistet.

Betrachtet man den charakteristikgleichen Fall $\chi(\overline{Q}) = \chi(\mathfrak{L})$ und den charakteristikungleichen Fall gesondert, so läßt sich über den Bewertungsring $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$, der aus dem Grundring $\overline{Q}$ bei Betrachtung modulo einem reduzierten Grundideal $\overline{\mathfrak{M}}$ entsteht, noch mehr aussagen.

Satz 7. *Sei $\overline{\mathfrak{M}}$ ein reduziertes Grundideal des Grundrings $\overline{Q}$. Dann ist $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ im charakteristikgleichen Fall gleich dem Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ von $\overline{Q}$, im charakteristikungleichen Fall dagegen ein perfekter p-adischer Bewertungsring mit zu $\mathfrak{L}$ isomorphem Restklassenkörper.*

Im charakteristikgleichen Fall ist nämlich $\pi = \chi e = 0$ und folglich $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{N}}$, d. h. $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}} = \overline{Q}/\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{L}$.

Im charakteristikungleichen Fall $\chi(\overline{Q}) = 0$, $\chi(\mathfrak{L}) = p$, ist dagegen $\pi = pe \neq 0$, ferner $\chi(\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}) = \chi(\overline{Q}) = 0$ und folglich $\tilde{\pi} = p\tilde{e} \neq 0$. $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ ist also ein vollständiger Bewertungsring von der Charakteristik 0 mit dem Primelement $p\tilde{e} \neq 0$, d. h. $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ ist wirklich ein perfekter p-adischer Bewertungsring.

Man erkennt nun sofort:

Satz 8. *Zu einem beliebig vorgegebenen Körper $\mathfrak{K}$ der Charakteristik p gibt es stets einen perfekten p-adischen Bewertungsring $\mathsf{B}_{\mathfrak{K}}$, dessen Restklassenkörper zu $\mathfrak{K}$ isomorph ist, folglich auch stets einen perfekten p-adisch bewerteten Körper $\mathsf{K}_{\mathfrak{K}}$, dessen Restklassenkörper zu $\mathfrak{K}$ isomorph ist.*

Nach § 4, Nr. 1 existiert nämlich zu dem vorgegebenen Körper $\mathfrak{K}$ der Charakteristik p sicher ein Grundring $\overline{Q}$ von der Charakteristik 0, dessen Restklassenkörper zu $\mathfrak{K}$ isomorph ist. Ist dann $\overline{\mathfrak{M}}$ ein reduziertes Grundideal von $\overline{Q}$, so ist $\mathsf{B}_{\mathfrak{K}} = \overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ nach dem vorigen Satz ein perfekter p-adischer Bewertungsring mit zu $\mathfrak{K}$ isomorphem Restklassenkörper. Der Quotientenkörper $\mathsf{K}_{\mathfrak{K}}$ von $\mathsf{B}_{\mathfrak{K}}$ stellt mithin nach § 2, Nr. 5 einen perfekten p-adisch bewerteten Körper dar, dessen Restklassenkörper zu $\mathfrak{K}$ isomorph ist.

3. Maximalitätssatz. Später brauchen wir noch:

Satz 9. *Ist $\overline{\mathfrak{M}}$ ein reduziertes Grundideal des Grundrings $\overline{Q}$, so ist $\overline{\mathfrak{M}}$ in folgendem Sinne ein maximales Primideal von $\overline{Q}$: Jedes Primideal $\mathfrak{M}^*$, das $\overline{\mathfrak{M}}$ umfaßt und dessen Restklassenkörper $\overline{Q}/\mathfrak{M}^*$ zu $\overline{Q}$ charakteristikgleich ist, stimmt mit $\overline{\mathfrak{M}}$ überein.*

Jedes Primideal $\mathfrak{M}^* \geqq \overline{\mathfrak{M}}$ entspricht nämlich nach dem Isomorphiesatz von E. Noether einem Primideal $\widetilde{\mathfrak{M}}^*$ aus $\widetilde{\overline{Q}} = \overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$. Dabei besteht $\mathfrak{M}^*$ aus allen Elementen von $\overline{Q}$, die in den zu $\widetilde{\mathfrak{M}}^*$ gehörigen Klassen liegen, und es ist $\overline{Q}/\mathfrak{M}^* \cong \widetilde{\overline{Q}}/\widetilde{\mathfrak{M}}^*$. Nun sind aber $\widetilde{\mathfrak{M}}^* = (\tilde{0})$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}^* = (\tilde{\pi})$ die einzigen Primideale des Bewertungsrings $\widetilde{\overline{Q}}$, die ihnen entsprechenden Ideale $\mathfrak{M}^* = \overline{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{M}^* = (\overline{\mathfrak{M}}, \pi)$ also die einzigen Primideale $\geqq \overline{\mathfrak{M}}$ aus $\overline{Q}$.

Für die weitere Überlegung sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist nämlich $\tilde{\pi} = \tilde{0}$, also π Element von $\overline{\mathfrak{M}}$, so ist $(\overline{\mathfrak{M}}, \pi) = \overline{\mathfrak{M}}$ und daher stets $\mathfrak{M}^* = \overline{\mathfrak{M}}$. Ist dagegen $\tilde{\pi} \neq \tilde{0}$, so besitzt der Restklassenring $\overline{Q}/(\overline{\mathfrak{M}}, \pi) \cong \widetilde{\overline{Q}}/\tilde{\pi}$ eine von $\chi(\widetilde{\overline{Q}}) = \chi(\overline{Q})$ verschiedene Charakteristik, weil $\tilde{\pi} = \chi\tilde{e}$ im Primintegritätsbereich von $\widetilde{\overline{Q}}$ liegt. Das einzige Primideal $\mathfrak{M}^* \geqq \overline{\mathfrak{M}}$, dessen Restklassenring dieselbe Charakteristik wie $\overline{Q}$ besitzt, ist also wieder $\mathfrak{M}^* = \overline{\mathfrak{M}}$.

§ 7. Ergänzungen für Grundkörper mit inseparablem Restklassenkörper.

1. Separierende Ordnung O. Wir betrachten jetzt einen maximalen Grundring $\overline{Q}$ mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ und verstehen unter U eine maximal glatte Hüllentranszendenzbasis von $\overline{Q}$. Der Kongruenzhomomorphismus H von $\overline{Q}$ auf $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{L}$ erzeugt dann eine umkehrbar eindeutige Abbildung von U auf den ganzen Körper $\mathfrak{L}$. Einer beliebigen Wohlordnung W des ganzen Körpers $\mathfrak{L}$ entspricht daher jeweils eine eindeutig bestimmte Wohlordnung der Hüllentranszendenzbasis U, die wir ebenfalls mit W bezeichnen. Dem Aufbau von $\mathfrak{L}$ mit Hilfe der wohlgeordneten Unterkörperkette, die aus dem Primkörper durch Adjunktion der zu W gehörigen Abschnitte von $\mathfrak{L}$ entsteht, ist dabei die wohlgeordnete Kette von Grundringen zugeordnet, die aus den zu W gehörigen Abschnitten von U abgeleitet sind. Auf diese Weise korrespondiert jedem beliebigen sukzessiven Aufbau von $\mathfrak{L}$ jeweils ein sukzessiver Aufbau von $\overline{Q}$.

Unter $\overline{\mathfrak{M}}$ verstehen wir zunächst ein reduziertes Grundideal von $\overline{Q}$, das zu der durch W wohlgeordneten Basis U gehört, wo W beliebig, aber fest gewählt ist. Die Polynome der Hüllenbasis, mit deren Hilfe wir $\overline{\mathfrak{M}}$ gebildet haben, sind nach Konstruktion wesentlich abhängig von den algebraischen Eigenschaften des Körpers $\mathfrak{L}$ bezüglich der Wohlordnung W.

Um den Beweis der Hauptsätze mit Henselschen Methoden führen zu können, werden wir nun von der Wohlordnung W voraussetzen müssen, daß sie eine separierende Wohlordnung von $\mathfrak{L}$ ist; nur dann nämlich kann die Existenz eines Nullstellensystems von $\overline{\mathfrak{M}}$ aus Henselschen Sätzen erschlossen werden. Die genannte Voraussetzung ist aber selbstverständlich unerfüllbar, wenn der Körper $\mathfrak{L}$ inseparabel ist, d. h. nach Definition, wenn er überhaupt keine separierende Wohlordnung besitzt. Die Überwindung der hieraus entstehenden Schwierigkeiten soll in diesem Paragraphen vorbereitet werden.

Sei also $\mathfrak{L}$ ein inseparabler Körper, seine Charakteristik folglich eine Primzahl p. Anstatt $\mathfrak{L}$ wohlzuordnen, werden wir uns seine Elemente allgemeiner bloß geordnet denken [31]). Zu diesem Zweck greifen wir aus $\mathfrak{L}$ einen separablen Unterkörper $\mathfrak{L}'$ heraus, über dem $\mathfrak{L}$ relativ vollkommen ist, und verstehen unter $\mathfrak{S}$ irgendeine Transzendenzbasis von $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}'$. Ist dann

$$(S) \qquad \mathfrak{L}^{(0)} \subseteqq \mathfrak{L}^{(1)} \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{L}^{(n)} \subseteqq \cdots \quad (\mathfrak{L} = \text{Vereinigungsmenge der } \mathfrak{L}^{(n)})$$

der Steinitzsche Körperturm von $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}'(\mathfrak{S})$, so gibt es eine separierende Ordnung O von $\mathfrak{L}$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

1. O induziert in jedem $\mathfrak{L}^{(n)}$ eine separierende Wohlordnung $W^{(n)}$.

2. Denkt man sich die Elemente von $\mathfrak{L}$ in der durch O angegebenen Reihenfolge hingeschrieben, so erhält man die Summendarstellung

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' + \sum_{n=\infty}^{0} \mathfrak{C}^{(n)} \qquad (\mathfrak{C}^{(n)} = \mathfrak{L}^{(n)} - \mathfrak{L}^{(n-1)},\ \mathfrak{C}^{(0)} = \mathfrak{L}^{(0)} - \mathfrak{L}') .$$

Die Elemente von $\mathfrak{L}'$ gehen also allen übrigen und die des Komplements $\mathfrak{C}^{(n)}$ jeweils dem Komplement $\mathfrak{C}^{(n-1)}$ voran.

Eine solche Ordnung O nennen wir eine zu dem Körperturm (S) gehörige separierende Ordnung. Sie legen wir im folgenden für den Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ von $\overline{Q}$ zugrunde. Als besonders wichtig merken wir für sie schon hier eine Eigenschaft an, die wir später an entscheidender Stelle benötigen werden:

Jedes bei O in dem Gesamtkörper $\mathfrak{L}$ algebraische Element $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{L}^{(n)}$ ist bereits bei der separierenden Wohlordnung $W^{(n+1)}$ in dem Unterkörper $\mathfrak{L}^{(n+1)}$ separabel algebraisch und zwar liegen die Koeffizienten des irreduziblen separablen Polynoms $\mathfrak{G}(x)$, das $\mathfrak{b}$ bei $W^{(n+1)}$ anulliert, in dem Körper $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}((\mathfrak{C}^{(n+1)})^{p})$, wo $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ der kleinste Unterkörper von $\mathfrak{L}^{(n)}$ ist, der alle $\mathfrak{b}$ bei $W^{(n)}$ vorausgehenden Elemente von $\mathfrak{L}^{(n)}$ umfaßt [32]).

2. Aufsteigende Folge reduzierter Grundideale. Zu jedem Körper $\mathfrak{L}^{(n)}$ des Körperturms (S), zu dem die separierende Ordnung O gehört, suchen wir in der Hüllentranszendenzbasis U von $\overline{Q}$ die Urbildmenge $U^{(n)}$ auf, die durch den Kongruenzhomomorphismus H auf $\mathfrak{L}^{(n)}$ abgebildet wird, und erhalten die Folge

$$U^{(0)} \subseteqq U^{(1)} \subseteqq \cdots \subseteqq U^{(n)} \subseteqq \cdots .$$

$\overline{Q}^{(n)}$ sei der Grundring der aus $U^{(n)}$ in $\overline{Q}$ abgeleitet ist. Es ist dann offenbar $\mathsf{H}(\overline{Q}^{(n)}) = \mathfrak{L}^{(n)}$ und

$$\overline{Q}^{(0)} \subseteqq \overline{Q}^{(1)} \subseteqq \cdots \subseteqq \overline{Q}^{(n)} \subseteqq \cdots .$$

$\overline{Q}$ selbst stellt die vollständige Hülle der Vereinigungsmenge aller $\overline{Q}^{(n)}$ dar.

In jedem der Grundringe $\overline{Q}^{(n)}$ werden wir weiter mit Hilfe der Ordnung O ein reduziertes Urbildideal $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ erklären. Zu diesem Zweck denken wir uns die separierende

---

[31]) Vgl. Nr. 11 der Einleitung.

[32]) Vgl. zu all' dem die in [21]) zitierte Arbeit.

Ordnung O von $\mathfrak{L}$ zunächst vermittels des Kongruenzhomomorphismus H auf die Menge U übertragen und bezeichnen die so entstehende Ordnung von U ebenfalls mit dem Buchstaben O. Da die Ordnung O von $\mathfrak{L}$ in jedem Körper $\mathfrak{L}^{(n)}$ eine Wohlordnung induziert, induziert auch die Ordnung O von U in jeder Teilmenge $U^{(n)}$ eine Wohlordnung $W^{(n)}$. $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ sei ein reduziertes Urbildideal, das zu der durch $W^{(n)}$ wohlgeordneten Basis $U^{(n)}$ gehört.

Wir behaupten dann:

Satz 10. *Man kann die reduzierten Urbildideale $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ der Grundringe $\overline{Q}^{(n)}$ stets so wählen, daß sie eine aufsteigende Folge bilden,*

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(0)} \leqq \overline{\mathfrak{M}}^{(1)} \leqq \cdots \leqq \overline{\mathfrak{M}}^{(n)} \leqq \cdots .$$

Jedes $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ ist nämlich nach § 4 gegeben in der Form

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(n)} = \langle \ldots G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(u), \ldots \rangle,$$

wo $\mathfrak{b}$ alle Klassen aus $\mathfrak{L}^{(n)}$ in der durch die Wohlordnung $W^{(n)}$ angegebenen Reihenfolge durchläuft, $\mathsf{H}(u) = \mathfrak{b}$ und $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)$ ein zu $W^{(n)}$ gehöriges Urbildpolynom für $\mathfrak{b}$ ist. Für die Polynome $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)$ gilt dabei genauer: Bezeichnet $U_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ die Teilmenge von $U^{(n)}$, die durch den Homomorphismus H auf den Abschnitt aller $\mathfrak{b}$ bei $W^{(n)}$ vorangehenden Elemente von $\mathfrak{L}^{(n)}$ abgebildet wird, und $\overline{Q}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ den aus $U_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ in $\overline{Q}$ abgeleiteten Grundring, so liegen die Koeffizienten von $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)$ in $\overline{Q}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$, und es ist $\mathsf{H}(G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)) = \mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)$ das durch $\mathfrak{b}$ bei $W^{(n)}$ annullierte irreduzible Polynom. $\mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)$ ist also irreduzibel über dem Körper $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$, der aus allen $\mathfrak{b}$ bei $W^{(n)}$ vorangehenden Elementen von $\mathfrak{L}^{(n)}$ abgeleitet ist. Bei den folgenden Überlegungen bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ dasjenige Ideal aus $\overline{Q}$, das seinerseits den durch $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(u)$ bestimmten Abschnitt der Hüllenbasis von $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ als Hüllenbasis besitzt,

$\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{b}}^{(n)} = \langle \ldots G_{\mathfrak{b}'}^{(n)}(u'), \ldots \rangle$ ($\mathfrak{b}'$ durchläuft alle $\mathfrak{b}$ bei $W^{(n)}$ vorangehenden Klassen aus $\mathfrak{L}^{(n)}$).

Zum Beweis von Satz 10 genügt es offenbar zu zeigen:

Hilfssatz 5. *Ist*

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(n-1)} = \langle \ldots G_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(u), \ldots \rangle \quad (\mathfrak{b} \text{ aus } \mathfrak{L}^{(n-1)})$$

bereits bestimmt, so lassen sich die Urbildpolynome $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(u)$ für die Elemente $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{L}^{(n)}$ so wählen, daß das Ideal

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(n)} = \langle \ldots G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(u), \ldots, \rangle \quad (\mathfrak{b} \text{ aus } \mathfrak{L}^{(n)})$$

das gegebene $\overline{\mathfrak{M}}^{(n-1)}$ umfaßt.

Bei der Begründung dieses Hilfssatzes gehen wir davon aus, daß die Körper $\mathfrak{L}^{(n-1)}$ und $\mathfrak{L}^{(n)}$ bei Anordnung gemäß $W^{(n-1)}$ und $W^{(n)}$ die Summendarstellungen

$$\mathfrak{L}^{(n-1)} = \mathfrak{L}' \qquad + \{\mathfrak{L}^{(n-1)} - \mathfrak{L}'\},$$
$$\mathfrak{L}^{(n)} = \mathfrak{L}' + \mathfrak{C}^{(n)} + \{\mathfrak{L}^{(n-1)} - \mathfrak{L}'\}$$

besitzen. Die Elemente von $\mathfrak{L}'$ stehen also sowohl bei der Wohlordnung $W^{(n-1)}$ von $\mathfrak{L}^{(n-1)}$ wie bei der Wohlordnung $W^{(n)}$ von $\mathfrak{L}^{(n)}$ am Anfang und haben dabei untereinander dieselbe Reihenfolge, weil $W^{(n-1)}$ und $W^{(n)}$ beide durch O induziert werden. Für jedes Element $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{L}'$ ist daher $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)} = \mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}$, und das Bildpolynom $\mathsf{H}(G_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x)) = \mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x)$, das nach der Wahl von $G_{\mathfrak{b}}^{n-1}(x)$ über $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}$ irreduzibel ist, ist selbstverständlich auch über $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ irreduzibel. Man kann daher für jedes $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{L}'$ das zugehörige Urbildpolynom $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(u)$ gleich dem entsprechenden Polynom $G_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(u)$ aus der Hüllenbasis des gegebenen $\overline{\mathfrak{M}}^{(n-1)}$ setzen. Ist

das geschehen, so wählen wir für die in der Wohlordnung $W^{(n)}$ nunmehr folgenden Elemente $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{C}^{(n)}$ die $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(u)$ irgendwie als zugehörige Urbildpolynome. Wir behalten uns also die genauere Verfügung über die Urbildpolynome $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(u)$ nur noch für die Elemente $\mathfrak{b}$ aus $\{\mathfrak{L}^{(n-1)} - \mathfrak{L}'\}$ vor, die ja in der Wohlordnung $W^{(n)}$ nach $\mathfrak{C}^{(n)}$ auftreten. Für diese $\mathfrak{b}$ können wir nicht einfach $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(u) = G_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(u)$ setzen; denn nunmehr ist $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)} = \mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(\mathfrak{C}^{(n)})$ ein Oberkörper von $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}$, und das Bildpolynom $\mathsf{H}(G_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x)) = \mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x)$ braucht daher über $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ nicht mehr irreduzibel zu sein. Wir werden aber zeigen, daß sich durch passende Wahl der Urbildpolynome $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(u)$ für die Elemente $\mathfrak{b}$ aus $\{\mathfrak{L}^{(n-1)} - \mathfrak{L}'\}$ stets die folgende Teilbarkeitsforderung erfüllen läßt:

(T) *Das gegebene Polynom* $G_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x)$ *ist mod.* $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ *durch* $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)$ *teilbar.*

Dann ist offenbar jeweils $G_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(u)$ in $(\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{b}}^{(n)}, G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(u))$ und damit in $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ enthalten, d. h. es ist wirklich $\overline{\mathfrak{M}}^{(n-1)} \leqq \overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$.

Die Erfüllbarkeit der Teilbarkeitsforderung (T) bestätigen wir durch vollständige Induktion innerhalb der durch O induzierten Wohlordnung von $\{\mathfrak{L}^{(n-1)} - \mathfrak{L}'\}$. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, für alle $\mathfrak{b}$ vorangehenden Elemente von $\{\mathfrak{L}^{(n-1)} - \mathfrak{L}'\}$ seien die zugehörigen Urbildpolynome bereits bekannt, und führen dann die Konstruktion von $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)$ durch. Da unsere Induktionsannahme für das Anfangselement von $\{\mathfrak{L}^{(n-1)} - \mathfrak{L}'\}$ offenbar inhaltslos ist, können wir den Induktionsbeginn sogleich in den allgemeinen Induktionsschluß mit hineinnehmen.

Ist das gegebene Polynom $G_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x) = 0$, so ist die Teilbarkeitsforderung (T) selbstverständlich bei jeder Wahl von $G_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)$ als Urbildpolynom bei $W^{(n)}$ für $\mathfrak{b}$ erfüllt.

Sei also jetzt $G_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x) \neq 0$. Wir betrachten den Ring $\widetilde{\overline{Q}}_{\mathfrak{b}}^{(n)} = \overline{Q}_{\mathfrak{b}}^{(n)}/\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ und den iterierten Restklassenring $\widetilde{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)} = \widetilde{\overline{Q}}_{\mathfrak{b}}^{(n)}/\tilde{\pi}$. Ist $F(x)$ ein beliebiges Polynom über $\overline{Q}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$, so bezeichne $\widetilde{F}(x)$ das Polynom über $\widetilde{\overline{Q}}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$, das aus $F(x)$ bei Ersetzung der Koeffizienten durch ihre Klassen mod. $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ entsteht; ferner $\widetilde{\widetilde{F}}(x)$ das Polynom über $\widetilde{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$, das aus $\widetilde{F}(x)$ weiter bei Ersetzung seiner Koeffizienten durch ihre iterierten Klassen mod. $\tilde{\pi}$ hervorgeht. $\widetilde{F}(x)$ bzw. $\widetilde{\widetilde{F}}(x)$ durchlaufen alle Polynome über $\widetilde{\overline{Q}}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ bzw. $\widetilde{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$, wenn $F(x)$ alle Polynome über $\overline{Q}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ durchläuft.

Der Ring $\widetilde{\overline{Q}}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ ist nach Satz 5 ein vollständiger Bewertungsring mit dem Primelement $\tilde{\pi}$, und $\widetilde{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ ist zu $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ kongruentisomorph; $\widetilde{\mathsf{H}}$ bezeichne den Kongruenzisomorphismus von $\widetilde{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ auf $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$. Es ist dann $\mathsf{H}(F(x)) = \widetilde{\mathsf{H}}(\widetilde{F}(x))$ für jedes $F(x)$ über $\overline{Q}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$. Da $\mathsf{H}(G_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x)) = \mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x)$ ist, ist also auch $\widetilde{\widetilde{\mathsf{H}}}(\widetilde{\widetilde{G}}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x)) = \mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x)$.

Über $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ ist das durch $\mathfrak{b}$ annullierte Polynom $\mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x)$ sicher teilbar durch das durch $\mathfrak{b}$ annullierte irreduzible Polynom $\mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)$,

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x) = \mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)\,\mathfrak{H}(x)\,, \tag{8}$$

und dabei sind $\mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n)}(x)$ und $\mathfrak{H}(x)$ teilerfremd, weil $\mathfrak{G}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x)$ separabel ist. Von dieser Teilbarkeitsgleichung werden wir schrittweise zu Teilbarkeitsgleichungen über $\widetilde{L}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$, $\widetilde{\overline{Q}}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ und $\overline{Q}_{\mathfrak{b}}^{(n)}$ aufsteigen.

Aus der Gleichung (8) geht vermöge des Isomorphismus $\widetilde{\widetilde{\mathsf{H}}}$ eine Gleichung

$$\widetilde{\widetilde{G}}_{\mathfrak{b}}^{(n-1)}(x) = \widetilde{\widetilde{F}}(x)\,\widetilde{\widetilde{H}}(x)$$

über $\widetilde{L}_\mathfrak{b}^{(n)}$ hervor, wo $\widetilde{\overline{\mathsf{H}}}(\widetilde{\overline{F}}(x)) = \mathfrak{G}_\mathfrak{b}^{(n)}(x)$ und $\widetilde{\overline{F}}(x)$, $\widetilde{\overline{H}}(x)$ wiederum teilerfremd sind. Anders ausgedrückt: Das Polynom $\widetilde{G}_\mathfrak{b}^{(n-1)}(x)$, das nach Konstruktion das Einselement zum höchsten Koeffizienten hat, ist mod. $\tilde{\pi}$ als Produkt zweier mod. $\tilde{\pi}$ teilerfremder Faktoren $\widetilde{F}(x)$ und $\widetilde{H}(x)$ darstellbar. Nach dem ersten Henselschen Satz besitzt daher $\widetilde{G}_\mathfrak{b}^{(n-1)}(x)$ über dem vollständigen Bewertungsring $\widetilde{\overline{Q}}_\mathfrak{b}^{(n)}$ einen Teiler $\widetilde{G}(x)$ mit höchstem Koeffizienten 1, der mod. $\tilde{\pi}$ zu $\widetilde{F}(x)$ kongruent, für den also $\widetilde{\overline{G}}(x) = \widetilde{\overline{F}}(x)$ ist. Für das Polynom $G(x)$ selbst gilt dann über $\overline{Q}_\mathfrak{b}^{(n)}$: $G(x)$ ist nach Konstruktion mod. $\overline{\mathfrak{M}}_\mathfrak{b}^{(n)}$ ein Teiler von $G_\mathfrak{b}^{(n-1)}(x)$, und es ist $\mathsf{H}(G(x)) = \widetilde{\overline{\mathsf{H}}}(\widetilde{\overline{G}}(x)) = \mathfrak{G}_\mathfrak{b}^{(n)}(x)$, d. h. $G(x)$ ist Urbild von $\mathfrak{G}_\mathfrak{b}^{(n)}(x)$.

Setzt man also $G_\mathfrak{b}^{(n)}(x)$ gleich dem Polynom $G(x)$, dessen höchsten Koeffizienten man noch gleich dem Einselement voraussetzen kann, so erfüllt $G_\mathfrak{b}^{(n)}(x)$ die Teilbarkeitsforderung (T). Satz 10 ist damit bewiesen.

3. Zu O gehöriges reduziertes Grundideal von $\overline{Q}$. Es gilt:

Satz 11. *Bilden die reduzierten Grundideale $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ der Grundringe $\overline{Q}^{(n)}$ eine aufsteigende Folge, so ist die vollständige Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ ihrer Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}$ ein reduziertes Grundideal von $\overline{Q}$.*

Wir bezeichnen dieses $\overline{\mathfrak{M}}$ als ein reduziertes Grundideal von $\overline{Q}$, das zu der durch O geordneten Hüllentranszendenzbasis U gehört.

Den Beweis des Satzes 11 führen wir in zwei Schritten α), β).

Wir betrachten zunächst die Vereinigungsmenge R der einander umfassenden Ringe $\overline{Q}^{(n)}$. R ist ein Integritätsbereich und $\mathfrak{M}$ ein Ideal von R. Das Ideal $\mathfrak{N}_R = \overline{\mathfrak{N}} \frown R$, hinsichtlich dessen R abgeschlossen ist, ist gleich der Vereinigungsmenge der einander umfassenden Ideale $\overline{\mathfrak{N}}^{(n)} = \overline{\mathfrak{N}} \frown \overline{Q}^{(n)}$, und dabei ist $\overline{Q}^{(n)}$ hinsichtlich $\overline{\mathfrak{N}}^{(n)}$ abgeschlossen. Von R, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_R$ gelangt man offenbar durch Übergang zur vollständigen Hülle zu $\overline{Q}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\overline{\mathfrak{N}}$.

α) *In R besteht die Gleichung $\mathfrak{N}_R = (\mathfrak{M}, \pi)$. Der Ring $\widetilde{R} = R/\mathfrak{M}$ ist ein mit $\overline{Q}$ charakteristikgleicher Bewertungsring mit dem Primelement $\tilde{\pi}$.*

Aus den nach Satz 5 bestehenden Gleichungen $\overline{\mathfrak{N}}^{(n)} = (\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}, \pi)$ gewinnt man nämlich durch Bildung der Vereinigungsmenge sofort $\mathfrak{N}_R = (\mathfrak{M}, \pi)$.

Wir überlegen weiter, daß $\widetilde{R} = R/\mathfrak{M}$ jeden der Ringe $\widetilde{\overline{Q}}^{(n)} = \overline{Q}^{(n)}/\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ umfaßt, oder was damit gleichbedeutend ist, daß jeweils $\mathfrak{M} \frown \overline{Q}^{(n)} = \overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ ist.

Der Durchschnitt $\mathfrak{M} \frown \overline{Q}^{(n)}$ ist nach Definition von $\mathfrak{M}$ sicher $\geqq \overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$. Wäre nun $\mathfrak{M} \frown \overline{Q}^{(n)} > \overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$, so müßte nach der Bildung von $\mathfrak{M}$ aus den $\overline{\mathfrak{M}}^{(r)}$ bereits für ein $r > n$ der Durchschnitt $\overline{\mathfrak{M}}^{(r)} \frown \overline{Q}^{(n)} > \overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ sein. Der Durchschnitt $\overline{\mathfrak{M}}^{(r)} \frown \overline{Q}^{(n)} = \overline{\mathfrak{M}}^{*(n)}$ ist aber ein Primideal in $\overline{Q}^{(n)}$, weil $\overline{\mathfrak{M}}^{(r)}$ nach Satz 5 ein Primideal von $\overline{Q}^{(r)}$ ist; der Restklassenring $\overline{Q}^{(n)}/\overline{\mathfrak{M}}^{*(n)}$ ist ferner mit $\overline{Q}$ charakteristikgleich, da $\overline{Q}^{(n)}/\mathfrak{M}^{*(n)}$ nach Definition von $\mathfrak{M}^{*(n)}$ zu einem Unterring von $\overline{Q}^{(r)}/\overline{\mathfrak{M}}^{(r)}$ kongruentisomorph und dieser nach Satz 5 von der Charakteristik $\chi(\overline{Q})$ ist. Aus dem am Schluß des vorigen Paragraphen angeführten Maximalitätssatz folgt daher die Gleichung $\overline{\mathfrak{M}}^{*(n)} = \overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$. Also ist auch $\mathfrak{M} \frown \overline{Q}^{(n)} = \overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$.

Da R gleich der Vereinigungsmenge der $\overline{Q}^{(n)}$ ist und $\widetilde{R} = R/\mathfrak{M}$ jedes $\widetilde{\overline{Q}}^{(n)} = \overline{Q}^{(n)}/\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ umfaßt, ist $\widetilde{R}$ notwendig gleich der Vereinigungsmenge der $\widetilde{\overline{Q}}^{(n)}$. Jedes $\widetilde{\overline{Q}}^{(n)}$ ist aber ein Bewertungsring mit dem Primelement $\tilde{\pi}$. Nach § 3, 1 gilt daher das gleiche von $\widetilde{R}$.

Durch Übergang zur vollständigen Hülle erhält man aus α) ganz ebenso wie beim Beweis von Satz 5 unter I γ) bzw. II β) das Schlußresultat:

β) In $\overline{Q}$ besteht die Gleichung $\overline{\mathfrak{R}} = (\overline{\mathfrak{M}}, \pi)$. Der Ring $\widetilde{\overline{Q}} = \widetilde{R}/\overline{\mathfrak{M}}$ ist ein mit $\overline{Q}$ charakteristikgleicher vollständiger Bewertungsring.

Damit ist in der Tat gezeigt, daß $\overline{\mathfrak{M}}$ die Definitionseigenschaften eines reduzierten Grundideals besitzt.

Abschnitt III. Beweis der Hauptsätze.

§ 8. Der Begriff des Nullstellensystems für das reduzierte Grundideal $\overline{\mathfrak{M}}$ eines festen Grundrings $\overline{Q}$.

In diesem Abschnitt sollen die Sätze der vorangehenden Paragraphen, die wir bisher nur für den Konstruktionssatz in § 6, Nr. 2 ausnutzten, zum Beweis der Hauptsätze verwendet werden.

1. Bezeichnungsfestsetzungen. Sei $\overline{Q}$ ein festgewählter maximaler Grundring mit dem Grundideal $\overline{\mathfrak{R}}$ und dem Restklassenkörper $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{L}$, U eine bezüglich $\overline{\mathfrak{R}}$ maximal glatte Hüllentranszendenzbasis von $\overline{Q}$. Je nachdem, ob $\mathfrak{L}$ separabel ist oder nicht, denken wir uns in $\mathfrak{L}$ eine feste separierende Wohlordnung W oder eine feste gemäß § 7, Nr. 1 definierte separierende Ordnung O zugrunde gelegt und verstehen unter $\overline{\mathfrak{M}}$ ein festes, zu der durch W bzw. O geordneten Basis U gehöriges, reduziertes Grundideal von $\overline{Q}$.

Neben $\overline{Q}$ betrachten wir einen beliebig bewerteten vollständigen Körper K, dessen Charakteristik $\chi(\mathsf{K})$ gleich $\chi(\overline{Q})$ ist, und dessen Restklassenkörper $\mathsf{B}/\mathfrak{p}$ einen zu $\mathfrak{L}$ isomorphen Unterkörper $\mathfrak{k}$ besitzt. $\mathfrak{k}$ braucht also abweichend von der Einleitung nicht mit dem ganzen Restklassenkörper von K übereinzustimmen. Ist Θ ein Isomorphismus von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{k}$ und bildet man $\overline{Q}$ zunächst durch den Kongruenzhomomorphismus H auf den Restklassenkörper $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{L}$, dann weiter $\mathfrak{L}$ durch Θ auf $\mathfrak{k}$ ab, so erhält man offenbar einen Homomorphismus $\overline{\Phi} = \Theta\mathsf{H}$ von $\overline{Q}$ auf $\mathfrak{k}$. $\overline{\Phi}$ führt alle und nur die Elemente von $\overline{\mathfrak{R}}$ in die Null über, insbesondere also das in $\overline{\mathfrak{R}}$ enthaltene charakteristische Primelement π.

Aus $\overline{Q}$ greifen wir nun wieder (vgl. § 4, Nr. 1) eine Menge V von der Form $V = \{u^{\iota}u\}$ heraus, wo u die Elemente einer Teilmenge von U durchläuft, und bilden den aus V in $\overline{Q}$ abgeleiteten Grundring $\overline{Q}_V$. $\overline{Q}_V$ wird durch $\overline{\Phi}$ auf den Körper $\mathfrak{k}_V = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}_V)$ abgebildet, wo $\mathfrak{P}$ der Primkörper von $\mathfrak{k}$ und $\overline{\Phi}(V) = \mathfrak{A}_V$ die $\overline{\Phi}$-Bildmenge von V ist. $\overline{\Phi}$ erzeugt also einen Homomorphismus $\overline{\Phi}_V$ von $\overline{Q}_V$ auf $\mathfrak{k}_V$.

Der Bildkörper $\mathfrak{k}_V$ besteht seiner Natur nach aus gewissen Klassen des Bewertungsrings B von K. Von diesen Klassen gehen wir wieder zu ihren Repräsentanten in B zurück, und zwar denken wir uns jedem Element v aus V einen Repräsentanten $\psi(v) = \alpha$ seiner $\overline{\Phi}$-Bildklasse $\overline{\Phi}(v) = \mathfrak{a}$ zugeordnet, so daß eine umkehrbar eindeutige Abbildung ψ von V auf die Teilmenge $\mathsf{A}_V = \{\alpha\}$ des Ringes B entsteht. Dabei ist also stets

$$\psi(v) \in \overline{\Phi}(v),$$

und man kann infolgedessen die durch $\overline{\Phi}$ induzierte Abbildung

$$\varphi(v) = \mathfrak{a} \text{ von } V \text{ auf } \mathfrak{A}_V$$

zusammensetzen aus ψ und der „$\mathfrak{p}$-Kongruenzabbildung“

$$\chi(\alpha) = \mathfrak{a} \text{ von } \mathsf{A}_V \text{ auf } \mathfrak{A}_V,$$

$$\varphi = \chi\psi.$$

Wir nennen die Abbildung ψ deshalb einen *Kongruenzteiler von* $\overline{\Phi}$.

Die Menge A_V enthält offenbar zu jeder Klasse aus $\mathfrak{A}_V$ mindestens einen Repräsentanten. Enthält sie zu jeder Klasse auch nur einen Repräsentanten, d. h. ist A_V ein Repräsentantensystem von $\mathfrak{A}_V$ so ist die Abbildung ψ von V auf A_V durch die Angabe von A_V und die Forderung, Kongruenzteiler von $\overline{\Phi}$ zu sein, bereits eindeutig bestimmt; denn es ist dann $\psi(v)$ gleich dem eindeutig bestimmten Repräsentanten von $\overline{\Phi}(v)$ in A_V. In diesem Falle geben wir die Abbildung ψ kurz durch das Zeichen $V \mid \mathsf{A}_V$ wieder.

2. Abbildungssatz. Wir behaupten:

Satz 12. *Ist die Abbildung ψ von V auf A_V ein Kongruenzteiler von $\overline{\Phi}$, so läßt sie sich auf eine und nur eine Weise zu einem stetigen Homomorphismus $\overline{\Psi}$ von $\overline{Q}_V$ auf einen eindeutig bestimmten Unterring $\overline{\Omega}'_V$ des Bewertungsrings B fortsetzen. $\overline{\Omega}'_V$ ist zu $\mathfrak{R}_V$ kongruenthomomorph, und es ist $\overline{\Phi}_V = \overline{\mathsf{X}}\,\overline{\Psi}$, wo $\overline{\mathsf{X}}$ den Kongruenzhomomorphismus von $\overline{\Omega}'_V$ auf $\mathfrak{R}_V$ bezeichnet.*

Zum Beweis dieser Behauptungen bauen wir den Grundring $\overline{Q}_V$ schrittweise aus dem Primintegritätsbereich P von $\overline{Q}$ auf, indem wir zunächst α) den Polynomring $J_V = P[V]$ bilden, dann β) den Quotientenring $Q_V = \frac{J_V}{S}$, wo S das System aller durch $\overline{\mathfrak{N}}$ unteilbaren Polynome von J bedeutet, schließlich γ) die vollständige Hülle $\overline{Q}_V$ von Q_V. Wir zeigen dann, daß die mengentheoretische Abbildung ψ von V auf A_V sich jeweils eindeutig fortsetzen läßt zu einem Homomorphismus von $J_V, Q_V, \overline{Q}_V$ und bestimmen gleichzeitig das Verhältnis dieser Fortsetzungen zu $\overline{\Phi}$.

α) Daß zunächst ψ eindeutig zu einem Homomorphismus Ψ' von $J_V = P[V]$ auf einen Unterring von B fortgesetzt werden kann, nämlich auf den Integritätsbereich $\mathsf{I}_V = \Pi[\mathsf{A}_V]$ ergibt sich unmittelbar aus § 1, Nr. 3. Dabei bedeutet Π den Primintegritätsbereich von K, und es ist

$$\Psi'\Big(\sum_{k_1 \cdots k_r} m_{k_1 \cdots k_r}\, e\, v_1^{k_1} \cdots v_r^{k_r}\Big) = \sum_{k_1 \cdots k_r} m_{k_1 \cdots k_r}\, \varepsilon\, \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_r^{k_r} \quad (e, \varepsilon \text{ Einselemente von } P, \Pi).$$

Der Homomorphismus $\overline{\Phi}$ erzeugt seinerseits einen Homomorphismus Φ'_V von $J_V = P[V]$ auf $\mathfrak{J}_V = \mathfrak{P}[\mathfrak{A}_V]$,

$$\Phi'_V\Big(\sum_{k_1 \cdots k_r} m_{k_1 \cdots k_r}\, e\, v_1^{k_1} \cdots v_r^{k_r}\Big) = \sum_{k_1 \cdots k_r} m_{k_1 \cdots k_r}\, \mathfrak{e}\, \mathfrak{a}_1^{k_1} \cdots \mathfrak{a}_r^{k_r} \quad (\mathfrak{e} \text{ Einselement von } \mathfrak{P}).$$

Ordnet man andererseits jedem Element von I_V seine in B mod. $\mathfrak{p}$ bestimmte Klasse zu, so erhält man den $\mathfrak{p}$-Kongruenzhomomorphismus X' von $\mathsf{I}_V = \Pi[\mathsf{A}_V]$ auf $\mathfrak{J}_V = \mathfrak{P}[\mathfrak{A}_V]$,

$$\mathsf{X}'\Big(\sum_{k_1 \cdots k_r} m_{k_1 \cdots k_r}\, \varepsilon\, \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_r^{k_r}\Big) = \sum_{k_1 \cdots k_r} m_{k_1 \cdots k_r}\, \mathfrak{e}\, \mathfrak{a}_1^{k_1} \cdots \mathfrak{a}_r^{k_r}\,.$$

Es ist nun, wie sofort ersichtlich, $\Phi'_V = \mathsf{X}'\Psi'$. Insbesondere ist $\mathsf{X}'(\Psi'(\pi)) = \Phi'_V(\pi) = 0$, d. h. die durch $\Psi'(\pi)$ in B mod. $\mathfrak{p}$ bestimmte Klasse ist die Nullklasse, $\Psi'(\pi)$ mithin durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

β) Das System S der Polynome, die bei der Bildung des Quotientenrings $Q_V = \frac{J_V}{S}$ in die Nenner genommen werden, geht gemäß seiner Definition bei dem Homomorphismus Φ'_V in das System $\Phi'_V(S) = \mathfrak{S}$ aller von 0 verschiedener Klassen aus $\mathfrak{J}_V$ über. S wird somit auch durch Ψ' in ein System $\Psi'(S) = \Sigma$ lauter von 0 verschiedener Elemente übergeführt; denn es ist $\mathsf{X}'(\Sigma) = \mathfrak{S}$, d. h. sogar die Klassen der Elemente aus Σ sind sämtlich von 0 verschieden. Nach § 1, Nr. 3 kann daher der Homomorphismus Ψ' von J_V eindeutig zu einem Homomorphismus Ψ von $Q_V = \frac{J_V}{S}$ fortgesetzt werden. Dabei ist für ein Element $\frac{d}{s}$ aus Q_V stets $\Psi\left(\frac{d}{s}\right) = \frac{\Psi'(d)}{\Psi'(s)} = \frac{\delta}{\sigma}$, ferner ist $\Psi(Q_V) = \frac{\mathsf{I}_V}{\Sigma} = \Omega_V$. Der

Quotientenring Ω_V liegt wieder in B, weil Σ aus lauter Elementen besteht, die durch $\mathfrak{p}$ unteilbar sind.

$\overline{\Phi}$ erzeugt seinerseits einen Homomorphismus Φ_V von $Q_V = \frac{J_V}{S}$ auf $\frac{\mathfrak{J}_V}{\mathfrak{S}} = \mathfrak{R}_V$, $\Phi_V\left(\frac{d}{s}\right) = \frac{\Phi'_V(d)}{\Phi'_V(s)} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{s}}$. Andererseits wird $\Omega_V = \frac{\mathsf{I}_V}{\Sigma}$ durch den Kongruenzhomomorphismus $\mathsf{X}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \frac{\mathsf{X}'_V(\delta)}{\mathsf{X}'_V(\sigma)} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{s}}$ ebenfalls in $\frac{\mathfrak{J}_V}{\mathfrak{S}} = \mathfrak{R}_V$ übergeführt, und es ist wieder $\Phi_V = \mathsf{X}\Psi$.

γ) Der Homomorphismus Ψ von Q_V auf Ω_V ist stetig, weil das Bild $\Psi(\pi) = \Psi'(\pi)$ des charakteristischen Primelements durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Ψ läßt sich daher nach § 2, Nr. 3 eindeutig zu einem stetigen Homomorphismus $\overline{\Psi}$ von $\overline{Q}_V$ auf einen Unterring des vollständigen Bewertungsrings B fortsetzen. Dabei ist $\overline{\Psi}(\overline{Q}_V) = \overline{\Omega}'_V$ seinerseits in der vollständigen Hülle $\overline{\Omega}_V$ von Ω_V enthalten.

$\overline{\Omega}'_V$ wird durch den $\mathfrak{p}$-Kongruenzhomomorphismus $\overline{\mathsf{X}}$ nach § 2, Nr. 4 wiederum auf $\mathfrak{R}_V$ abgebildet. $\overline{\mathsf{X}}\,\overline{\Psi}$ ist daher ebenso wie $\overline{\Phi}_V$ ein Homomorphismus von $\overline{Q}_V$ auf $\mathfrak{R}_V$ und Fortsetzung von $\mathsf{X}\Psi = \Phi_V$. Da es nach § 2, Nr. 4 nur einen Homomorphismus von $\overline{Q}_V$ auf $\mathfrak{R}_V$ gibt, der Fortsetzung von Φ_V ist, so ist $\overline{\Phi}_V = \overline{\mathsf{X}}\,\overline{\Psi}$.

Damit ist Satz 12 vollständig bewiesen.

Aus der Tatsache, daß der Ring $\overline{\Omega}'_V$ zu $\mathfrak{R}_V$ kongruenthomomorph ist, ergibt sich nach § 1, Nr. 1 sofort:

Folgerung. *Der Restklassenring $\overline{\Omega}'_V/(\mathfrak{p} \frown \overline{\Omega}'_V)$ von $\overline{\Omega}'_V$ ist zu $\mathfrak{R}_V$ kongruentisomorph.*

Im Anschluß an Satz 12 führen wir ferner folgende Bezeichnungen ein. Ist $D(v)$ ein Element von $\overline{Q}_V$ und $D(\alpha)$ sein $\overline{\Psi}$-Bild in $\overline{\Omega}'_V$, so sagen wir, $D(\alpha)$ sei aus $D(v)$ durch die Abbildung $\psi(V) = \mathsf{A}_V$ entstanden; entsprechend: Der ganze Ring $\overline{\Omega}'_V$ sei aus $\overline{Q}_V$ durch die Abbildung $\psi(V) = \mathsf{A}_V$ entstanden.

Ist A ein Repräsentantensystem für alle Klassen von $\mathfrak{R}$, so geht der ganze Ring $\overline{Q}$ durch die Abbildung $U \mid \mathsf{A}$ in einen Unterring von B über. Die Abbildung $U \mid \mathsf{A}$ erzeugt daher stets eine Abbildung $\psi(V) = \mathsf{A}_V$, die sicher Kongruenzteiler von $\overline{\Phi}$ ist.

3. Verschärfung. Für die späteren Schlüsse brauchen wir noch eine Verschärfung des in der vorigen Nummer bewiesenen Abbildungssatzes.

Sei $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Ideal des Bewertungsrings B von K; $\psi(V) = \mathsf{A}_V$ und $\psi'(V) = \mathsf{A}'_V$ seien zwei Abbildungen von V auf Teilmengen $\mathsf{A}_V = \{\alpha\}$ und $\mathsf{A}'_V = \{\alpha'\}$ von B. Wir nennen dann ψ und ψ' kongruent mod. $\mathfrak{r}$, wenn für jedes v gilt: $\psi(v) \equiv \psi'(v)$ mod. $\mathfrak{r}$. Stellen A_V und A'_V beide je ein Repräsentantensystem aller Klassen aus $\overline{\Phi}(V) = \mathfrak{A}_V$ dar, so bezeichnen wir A_V und A'_V selbst als kongruent mod. $\mathfrak{r}$, wenn die in A_V und A'_V liegenden Repräsentanten α und α' einer beliebigen Klasse $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{A}_V$ stets mod. $\mathfrak{r}$ kongruent sind. Aus $\mathsf{A}_V \equiv \mathsf{A}'_V$ mod. $\mathfrak{r}$ folgt sofort, daß die Abbildungen $V \mid \mathsf{A}_V$ und $V \mid \mathsf{A}'_V$ mod. $\mathfrak{r}$ kongruent sind.

Satz 13. *Sind $\psi(V) = \mathsf{A}_V$ und $\psi'(V) = \mathsf{A}'_V$ zwei Abbildungen, die beide Kongruenzteiler von $\overline{\Phi}$ und mod. $\mathfrak{r}$ kongruent sind, sind ferner $D(\alpha)$ bzw. $D(\alpha')$ die Elemente von B, die aus einem Element $D(v)$ von $\overline{Q}$ durch die Abbildungen $\psi(V) = \mathsf{A}_V$ bzw. $\psi'(V) = \mathsf{A}'_V$ entstehen, so ist auch*

$$D(\alpha) \equiv D(\alpha') \text{ mod. } \mathfrak{r}.$$

Ist nämlich zunächst $D(v)$ ein Element von Q_V, also

$$D(v) = \frac{\Sigma m_{k_1 \dots k_r}\, e v_1^{k_1} \cdots v_r^{k_r}}{\Sigma\ l_{k_1 \dots k_r}\, e v_1^{k_1} \cdots v_r^{k_r}}$$

und folglich

$$D(\alpha) = \frac{\Sigma m_{k_1 \dots k_r}\, \varepsilon \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_r^{k_r}}{\Sigma\ l_{k_1 \dots k_r}\, \varepsilon \alpha^{k_1} \cdots \alpha_r^{k_r}} \text{ bzw. } D(\alpha') = \frac{\Sigma m_{k_1 \dots k_r}\, \varepsilon \alpha_1'^{k_1} \cdots \alpha_r'^{k_r}}{\Sigma\ l_{k_1 \dots k_r}\, \varepsilon \alpha_1'^{k_1} \cdots \alpha_r'^{k_r}},$$

so ergibt sich aus $\alpha_i \equiv \alpha_i'$ mod. $\mathfrak{r}$ sofort $D(\alpha) \equiv D(\alpha')$ mod. $\mathfrak{r}$, denn die Nenner von $D(\alpha)$ und $D(\alpha')$ sind Einheiten von B.

Ein beliebiges Element $D(v)$ von $\overline{Q}_V$ ist stets Grenzwert einer Folge

$$D_1(v),\ D_2(v), \dots, D_n(v), \dots$$

von Elementen $D_n(v)$ aus Q_V; $D_n(v) \to D(v)$. Da der durch die Abbildungen $\psi(V) = \mathsf{A}_V$ bzw. $\psi'(V) = \mathsf{A}_V'$ erzeugte Homomorphismus stetig ist, gilt dann auch $D_n(\alpha) \to D(\alpha)$ bzw. $D_n(\alpha') \to D(\alpha')$. Nach dem soeben bewiesenen ist aber $D_n(\alpha) - D_n(\alpha')$ ein Element aus $\mathfrak{r}$, weil $D_n(\alpha)$ und $D_n(\alpha')$ aus einem Element von Q_V entstanden sind. Andererseits ist $\mathfrak{r}$ als Ideal des vollständigen Bewertungsrings B sicher selbst vollständig. Der Grenzwert $D(\alpha) - D(\alpha')$ der Folge $D_n(\alpha) - D_n(\alpha')$ liegt also ebenfalls in $\mathfrak{r}$, d. h. es ist $D(\alpha) \equiv D(\alpha')$ mod. $\mathfrak{r}$.

4. Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}$. Wir betrachten nun ein Repräsentantensystem A für alle Klassen von $\mathfrak{R}$ und führen den ganzen Ring $\overline{Q}$ durch die Abbildung $U \mid \mathsf{A}$ in einen Unterring $\overline{\Omega}$ von B über. A heiße ein *Nullstellensystem des reduzierten Urbildideals* $\overline{\mathfrak{M}}$, wenn dabei alle Elemente von $\overline{\mathfrak{M}}$ in die Null übergehen.

Satz 14. *Ist* A *ein Nullstellensystem von* $\overline{\mathfrak{M}}$, *so ist der aus* $\overline{Q}$ *durch die Abbildung* $U \mid \mathsf{A}$ *entstehende Unterring* $\overline{\Omega}$ *von* B *zu* $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ *isomorph.*

Sei nämlich $\mathfrak{M}^*$ das Ideal aller Elemente aus $\overline{Q}$, die bei der Abbildung $U \mid \mathsf{A}$ in die Null übergehen, so daß $\overline{Q}/\mathfrak{M}^* \cong \overline{\Omega}$ ist. Da A ein Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}$ ist, ist sicher $\mathfrak{M}^* \geqq \overline{\mathfrak{M}}$. $\mathfrak{M}^*$ ist ferner Primideal, weil $\overline{\Omega}$ ein Integritätsbereich ist, und es ist die Charakteristik $\chi(\overline{Q}/\mathfrak{M}^*) = \chi(\overline{\Omega})$ gleich der Charakteristik $\chi(\overline{Q})$, weil $\overline{\Omega}$ dieselbe Charakteristik wie K hat und nach Voraussetzung $\chi(\mathsf{K}) = \chi(\overline{Q})$ ist. Nach dem Maximalitätssatz für die reduzierten Grundideale ist daher $\mathfrak{M}^* = \overline{\mathfrak{M}}$ und damit wirklich $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}} \cong \overline{\Omega}$.

Wir gehen jetzt noch näher auf die Verhältnisse im charakteristikgleichen und charakteristikungleichen Fall gesondert ein. Dabei bedeute A stets ein Repräsentantensystem für die Klassen von $\mathfrak{R}$, das zugleich Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}$ ist.

Im charakteristikgleichen Fall ist $\chi(\overline{Q}) = \chi(\mathfrak{L})$ und ebenso $\chi(\mathsf{K}) = \chi(\mathfrak{K})$. Der Ring $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ ist nach § 4, Nr. 4 ein Körper, also ist auch der durch die Abbildung $U|\mathsf{A}$ entstehende zu $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ isomorphe Unterring $\overline{\Omega}$ von B ein Körper. Da das Primideal $\mathfrak{p}$ von B von Einheitsideal verschieden ist, ist infolgedessen notwendig

$$\mathfrak{p} \frown \overline{\Omega} = 0. \tag{9}$$

Andererseits ist der Restklassenring $\overline{\Omega}/(\mathfrak{p} \frown \overline{\Omega})$, wie in Nr. 2 gezeigt, zu $\mathfrak{K}$ kongruentisomorph. Wegen (9) ist mithin $\overline{\Omega}$ selbst zu $\mathfrak{K}$ kongruentisomorph, d. h. $\overline{\Omega}$ ist ein relationstreues Repräsentantensystem für die Klassen von $\mathfrak{K}$.

Im charakteristikungleichen Fall ist $\chi(\bar{Q}) = 0$, $\chi(\mathfrak{L}) = p$ und ebenso $\chi(\mathsf{K}) = 0$, $\chi(\mathfrak{K}) = p$. Der Ring $\bar{Q}/\bar{\mathfrak{M}}$ ist nach § 4, Nr. 4 ein perfekter p-adischer Bewertungsring, und das gleiche gilt daher von dem Ring $\bar{\Omega}$ der aus $\bar{Q}$ durch die Abbildung $U \mid \mathsf{A}$ entsteht. Da $\bar{\Omega}$ als Bewertungsring nur ein vom Nullideal verschiedenes Primideal enthält, ist $\mathfrak{p} \frown \bar{\Omega}$ gleich dem Primideal von $\bar{\Omega}$. Aus der Tatsache, daß $\bar{\Omega}/(\mathfrak{p} \frown \bar{\Omega})$ zu $\mathfrak{K}$ kongruentisomorph ist, folgt daher: $\bar{\Omega}$ ist ein perfekter p-adischer Bewertungsring mit zu $\mathfrak{K}$ kongruentisomorphem Restklassenkörper.

Zusammengefaßt erhalten wir folgendes Ergebnis, das wir wegen seiner Wichtigkeit noch einmal ausführlich formulieren:

Satz 14′. *Sei* K *ein beliebig bewerteter vollständiger Körper, dessen Charakteristik mit der Charakteristik des festen maximalen Grundrings* $\bar{Q}$ *übereinstimmt, und dessen Restklassenkörper einen zum Restklassenkörper* $\mathfrak{L}$ *von* $\bar{Q}$ *isomorphen Unterkörper* $\mathfrak{K}$ *besitzt.* K *enthalte ferner ein Repräsentantensystem für die Klassen von* $\mathfrak{K}$, *das zugleich ein Nullstellensystem des festen reduzierten Grundideals* $\bar{\mathfrak{M}}$ *von* $\bar{Q}$ *ist. Dann ist der Unterring* $\bar{\Omega}$, *der aus* $\bar{Q}$ *durch die Abbildung* $U \mid \mathsf{A}$ *entsteht, zu dem festen Ring* $\bar{Q}/\bar{\mathfrak{M}}$ *isomorph.* $\bar{\Omega}$ *stellt im charakteristikgleichen Fall ein relationstreues Repräsentantensystem für die Klassen von* $\mathfrak{K}$, *im charakteristikungleichen Fall einen perfekten p-adischen Bewertungsring mit zu* $\mathfrak{K}$ *kongruentisomorphem Restklassenkörper dar.*

§ 9. Existenzbeweis für ein Nullstellensystem von $\bar{\mathfrak{M}}$ im Falle eines Grundrings $\bar{Q}$ mit separablem Restklassenkörper.

1. Vorbereitungen. Wir wollen nun zeigen, daß die in Satz 14′ auftretende Voraussetzung über die Existenz eines Nullstellensystems von $\bar{\mathfrak{M}}$ bei beliebiger Bewertung von K stets erfüllt ist, sobald der Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ des Grundrings $\bar{Q}$ separabel ist. Genauer:

Satz 15. *Ist der Restklassenkörper* $\mathfrak{L}$ *des festen Grundrings* $\bar{Q}$ *separabel und* K *ein beliebig bewerteter vollständiger Körper, dessen Charakteristik* $\chi(\mathsf{K})$ *gleich* $\chi(\bar{Q})$ *ist, und dessen Restklassenkörper einen zu* $\mathfrak{L}$ *isomorphen Unterkörper* $\mathfrak{K}$ *besitzt, so enthält* K *stets ein Repräsentantensystem für die Klassen von* $\mathfrak{K}$, *das Nullstellensystem des reduzierten Grundideals* $\bar{\mathfrak{M}}$ *von* $\bar{Q}$ *ist.*

Zum Beweis dieses Satzes denken wir uns die feste separierende Wohlordnung W von $\mathfrak{L}$ mit Hilfe des Isomorphismus Θ auf den Körper $\mathfrak{K}$ übertragen und bezeichnen die entstehende Wohlordnung von $\mathfrak{K}$ ebenfalls mit W. Wir haben dann also drei ähnlich wohlgeordnete Mengen nebeneinander: Einmal die durch W wohlgeordnete Hüllentranszendenzbasis U, dann den durch W wohlgeordneten Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ und schließlich den durch W wohlgeordneten Körper $\mathfrak{K}$. Dabei geht die Wohlordnung W von U, die durch den Kongruenzhomomorphismus H in die Wohlordnung W von $\mathfrak{L}$ übergeführt wird, offenbar durch $\bar{\Phi} = \Theta\mathsf{H}$ in die Wohlordnung W von $\mathfrak{K}$ über. Wir betrachten nun U und $\mathfrak{K}$ unmittelbar nebeneinander, lassen also das Zwischenglied $\mathfrak{L}$ fort.

Dazu bemerken wir: Die Abschnitte von U werden offenbar durch $\bar{\Phi}$ auf die Abschnitte von $\mathfrak{K}$ abgebildet; die aus den Abschnitten von U in $\bar{Q}$ abgeleiteten Grundringe auf die aus den Abschnitten von $\mathfrak{K}$ abgeleiteten Körper. Wir bezeichnen mit $U_{\mathfrak{a}}$ den Abschnitt von U, dem in $\mathfrak{K}$ der durch das Element $\mathfrak{a}$ bestimmte Abschnitt entspricht,

mit $\overline{Q}_\mathfrak{a}$ den aus $U_\mathfrak{a}$ abgeleiteten Grundring, so daß $\overline{\Phi}(\overline{Q}_\mathfrak{a}) = \mathfrak{K}_\mathfrak{a}$ ist. Das reduzierte Grundideal $\overline{\mathfrak{M}}$ ist ursprünglich mit Hilfe einer Hüllenbasis definiert in der Gestalt

$$\overline{\mathfrak{M}} = \langle \ldots G_\mathfrak{b}(u) , \ldots \rangle,$$

wo $\mathfrak{b}$ alle Elemente von $\mathfrak{L}$ durchläuft, $\mathsf{H}(u) = \mathfrak{b}$ und $\mathsf{H}(G_\mathfrak{b}(x)) = \mathfrak{G}_\mathfrak{b}(x)$ das durch $\mathfrak{b}$ bei W annullierte irreduzible Polynom ist. Wir suchen jetzt die Klasse $\Theta(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$ von $\mathfrak{K}$ auf, und setzen $G_\mathfrak{b}(x) = G_\mathfrak{a}(x)$, schreiben also dementsprechend:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \langle \ldots G_\mathfrak{a}(u), \ldots \rangle,$$

wo $\mathfrak{a}$ alle Klassen von $\mathfrak{K}$ durchläuft, $\overline{\Phi}(u) = \mathfrak{a}$ und $\overline{\Phi}(G_\mathfrak{a}(x)) = \mathfrak{F}_\mathfrak{a}(x)$ das durch $\mathfrak{a}$ bei W annullierte irreduzible Polynom ist. Die Koeffizienten von $G_\mathfrak{a}(x)$ liegen jeweils in $\overline{Q}_\mathfrak{a}$.

2. Existenzbeweis. Da der durch die Abbildung $U \mid \mathsf{A}$ erzeugte Homomorphismus von $\overline{Q}$ nach Satz 12 stetig ist, ergibt sich Satz 15 sofort aus der folgenden Existenzaussage:

(E) *Man kann aus jeder Klasse* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{K}$ *einen Repräsentanten* α *so herausgreifen, daß für das Repräsentantensystem* $\mathsf{A} = \{\alpha\}$ *gilt: Die Polynome* $G_\mathfrak{a}(u)$ *der Hüllenbasis von* $\overline{\mathfrak{M}}$ *gehen durch die Abbildung* $U \mid \mathsf{A}$ *sämtlich in Null über. Dabei kann man die Repräsentanten der bei* W *transzendenten Klassen* $\mathfrak{a}$ *noch willkürlich vorschreiben; ist das geschehen, so sind die Repräsentanten der bei* W *algebraischen Klassen eindeutig bestimmt.*

Diese Existenzaussage bestätigen wir ihrerseits durch vollständige Induktion innerhalb des durch W wohlgeordneten Körpers $\mathfrak{K}$. Wir nehmen an, aus jeder $\mathfrak{a}$ vorangehenden Klasse $\mathfrak{a}'$ sei bereits ein Repräsentant α' so herausgegriffen, daß α' für die bei W transzendenten Klassen $\mathfrak{a}'$ gleich den willkürlich vorgeschriebenen Repräsentanten ist und daß alle Polynome $G_{\mathfrak{a}'}(u')$ bei der Abbildung $U_\mathfrak{a} \mid \mathsf{A}'$ verschwinden, wo $\mathsf{A}' = \{\alpha'\}$ ist. Wir zeigen dann, daß $\mathfrak{a}$ einen eindeutig bestimmten Repräsentanten α besitzt mit folgenden beiden Eigenschaften: Falls $\mathfrak{a}$ transzendent bei W ist, stimmt α mit dem vorgeschriebenen Repräsentanten von $\mathfrak{a}$ überein; $G_\mathfrak{a}(u)$ verschwindet ferner bei der Abbildung $\{U_\mathfrak{a}, u\} \mid \{\mathsf{A}', \alpha\}$. Da unsere Induktionsannahme für die Anfangsklasse $\mathfrak{a}$ inhaltslos ist, können wir den Induktionsbeginn sogleich in den allgemeinen Induktionsschluß mit hereinnehmen.

Ist $\mathfrak{a}$ transzendent bei W, so ist nach Definition $G_\mathfrak{a}(u) = 0$. $G_\mathfrak{a}(u)$ verschwindet daher sicher bei der Abbildung $\{U_\mathfrak{a}, u\} \mid \{\mathsf{A}', \alpha\}$, wo α der gegebene Repräsentant von $\mathfrak{a}$ ist.

Wir brauchen uns infolgedessen nur noch mit dem Fall zu befassen, daß $\mathfrak{a}$ bei W algebraisch ist. Da das Polynom $G_\mathfrak{a}(x)$ das Einselement als höchsten Koeffizienten und lauter Koeffizienten aus $\overline{Q}_\mathfrak{a}$ besitzt, geht es bei der Abbildung $U_\mathfrak{a} \mid \mathsf{A}'$ in ein Polynom $\mathsf{G}_\mathfrak{a}(x)$ mit dem Einselement als höchstem Koeffizienten und lauter Koeffizienten aus B über. Für ein Element α aus $\mathfrak{a}$ entsteht aus $G_\mathfrak{a}(u)$ bei der Abbildung $\{U_\mathfrak{a}, u\} \mid \{\mathsf{A}', \alpha\}$ das Element $\mathsf{G}_\mathfrak{a}(\alpha)$. Unsere Induktionsbehauptung ist daher äquivalent mit der Behauptung, daß $\mathfrak{a}$ eine eindeutig bestimmte Nullstelle α von $\mathsf{G}_\mathfrak{a}(x)$ enthält, und diese letzte Behauptung wollen wir jetzt beweisen.

Ersetzt man in $\mathsf{G}_\mathfrak{a}(x)$ die Koeffizienten durch ihre Klassen mod. $\mathfrak{p}$, so erhält man nach Satz 12 das Polynom $\overline{\mathsf{X}}(\mathsf{G}_\mathfrak{a}(x)) = \overline{\Phi}(G_\mathfrak{a}(x)) = \mathfrak{F}_\mathfrak{a}(x)$. $\mathfrak{F}_\mathfrak{a}(x)$ ist das durch $\mathfrak{a}$ bei W annullierte irreduzible Polynom, besitzt also sicher keine mehrfachen Nullstellen, weil W eine separierende Wohlordnung von $\mathfrak{K}$ ist. Für das Polynom $\mathsf{G}_\mathfrak{a}(x)$ bedeutet das: $\mathsf{G}_\mathfrak{a}(x)$ wird mod. $\mathfrak{p}$ durch einen beliebigen Repräsentanten α_0 von $\mathfrak{a}$ annulliert und besitzt mod. $\mathfrak{p}$ keine mehrfachen Nullstellen. Nach dem ersten Henselschen Satz existiert daher in dem

vollständigen Bewertungsring B ein eindeutig bestimmtes Element α, für das

$$\mathsf{G}_{\mathfrak{a}}(\alpha) = 0 \text{ und } \alpha \equiv \alpha_0 \text{ mod. } \mathfrak{p}$$

ist, d. h. welches $\mathsf{G}_{\mathfrak{a}}(x)$ annulliert und Repräsentant von $\mathfrak{a}$ ist.

Damit ist die Aussage (E) und folglich auch Satz 15 bewiesen.

§ 10. Existenzbeweis für ein Nullensystem von $\overline{\mathfrak{M}}$ im Falle eines Grundrings $\bar{o}$ mit inseparablem Restklassenkörper.

1. Vorbereitungen. Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn der Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ des Grundrings $\bar{o}$ inseparabel ist. Ist dann K ein beliebig bewerteter, vollständiger Körper, dessen Charakteristik $\chi(\mathsf{K})$ gleich $\chi(\bar{o})$ ist und dessen Restklassenkörper einen zu $\mathfrak{L}$ isomorphen Unterkörper $\mathfrak{k}$ besitzt, so braucht K überhaupt kein Nullstellensystem für das reduzierte Grundideal $\overline{\mathfrak{M}}$ zu enthalten. Dafür wird der Jüngere von uns in einer nachfolgenden Note ein Beispiel angeben. Um die Existenz eines Nullstellensystems von $\overline{\mathfrak{M}}$ auch im Falle eines inseparablen Restklassenkörpers zu gewährleisten, müssen wir vielmehr in K eine diskrete Bewertung voraussetzen.

Satz 16. *Ist der Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ des festen Grundrings $\bar{o}$ inseparabel und K ein diskret bewerteter perfekter Körper, dessen Charakteristik $\chi(\mathsf{K})$ gleich $\chi(\bar{o})$ ist und dessen Restklassenkörper einen zu $\mathfrak{L}$ isomorphen Unterkörper besitzt, so enthält K stets ein Repräsentantensystem für die Klassen von $\mathfrak{k}$, das ein Nullstellensystem des reduzierten Grundideals $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\bar{o}$ ist.*

Den Beweis dieses Satzes bereiten wir zunächst durch einige Feststellungen vor.

Da die isomorphen Körper $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{k} = \mathsf{B}/\mathfrak{p}$ inseparabel sind, sind sie sicher von Primzahlcharakteristik $\chi = p$. Das p-fache $p\varepsilon$ des Einselementes ε von K liegt daher in $\mathfrak{p}$, und das charakteristische Primelement $\pi = \chi e$ von $\bar{o}$ geht bei einem Homomorphismus eines Unterrings von $\bar{o}$ auf einen Unterring von B stets notwendig in das Element $p\varepsilon$ über.

Wir erinnern ferner noch einmal kurz an die Definitionen des § 7. Wir haben dort folgendes Schema entwickelt, in dem untereinander stehendes jeweils zusammen gehört:

a) $\mathfrak{L}^{(0)} \subseteq \mathfrak{L}^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{L}^{(n)} \subseteq \cdots$ (Unterkörper von $\mathfrak{L}$),

b) $U^{(0)} \subseteq U^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq U^{(n)} \subseteq \cdots$ (Teilmengen von U),

c) $\bar{o}^{(0)} \subseteq \bar{o}^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq \bar{o}^{(n)} \subseteq \cdots$ (Grundringe aus $\bar{o}$),

d) $\overline{\mathfrak{M}}^{(0)} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq \overline{\mathfrak{M}}^{(n)} \subseteq \cdots$ (reduzierte Grundideale der $\bar{o}^{(n)}$).

Dabei stehen

a) in der ersten Zeile die Unterkörper des Steinitzschen Körperturmes von $\mathfrak{L}$, die bei der Definition der separierenden Ordnung O benutzt wurden (O induziert in jedem $\mathfrak{L}^{(n)}$ eine separierende Wohlordnung $W^{(n)}$);

b) in der zweiten Zeile die Teilmengen $U^{(n)}$ von U, die den Körpern $\mathfrak{L}^{(n)}$ vermittels des Kongruenzhomomorphismus H entsprechen, $\mathsf{H}(U^{(n)}) = \mathfrak{L}^{(n)}$ (O überträgt sich vermittels H auf U und induziert in jedem $U^{(n)}$ eine Wohlordnung $W^{(n)}$);

c) in der dritten Zeile die aus den $U^{(n)}$ in $\bar{o}$ abgeleiteten Grundringe $\bar{o}^{(n)}$, für die ebenfalls $\mathsf{H}(\bar{o}^{(n)}) = \mathfrak{L}^{(n)}$ gilt;

d) in der vierten Zeile die durch Satz 11 gelieferten reduzierten Grundideale $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ aus $\bar{o}^{(n)}$, die jeweils zu der durch $W^{(n)}$ wohlgeordneten Hüllentranszendenzbasis $U^{(n)}$ gehören.

Das Ideal $\overline{\mathfrak{M}}$ ist gleich der vollständigen Hülle der Vereinigungsmenge aller $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$.

Bildet man den Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ von $\overline{Q}$ durch den Isomorphismus Θ auf den Körper $\mathfrak{K}$ ab, so überträgt sich die separierende Ordnung O von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{K}$, und es geht der Steinitzsche Körperturm aus der Zeile a) des obigen Schemas in einen Steinitzschen Körperturm von $\mathfrak{K}$ über:

e) $$\mathfrak{K}^{(0)} \subseteq \mathfrak{K}^{(1)} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{K}^{(n)} \subseteq \ldots .$$

Die separierende Ordnung O von $\mathfrak{K}$ gehört dann zu diesem Körperturm; O induziert also in jedem $\mathfrak{K}^{(n)}$ wieder eine separierende Wohlordnung $W^{(n)}$. Durch den Homomorphismus $\overline{\Phi} = \Theta\mathsf{H}$, der sich aus dem Kongruenzhomomorphismus H und dem Isomorphismus Θ zusammensetzt, werden ferner auch die Zeilen b) und c) in e) übergeführt, d. h. jedes $\overline{Q}^{(n)}$ besitzt einen Restklassenkörper, der zu $\mathfrak{K}^{(n)}$ isomorph ist.

Im folgenden werden wir von den drei durch O ähnlich wohlgeordneten Mengen U, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ die Mengen U und $\mathfrak{K}$ unmittelbar nebeneinander betrachten und dabei den Umstand benützen, daß U durch $\overline{\Phi}$ umkehrbar eindeutig auf $\mathfrak{K}$ bezogen wird.

2. Beweisgedanke. Infolge der soeben angegebenen Eigenschaften von $\overline{Q}^{(n)}$ und $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ enthält K nach Satz 15 jeweils ein Restklassensystem $\mathsf{A}^{(n)}$ für die Klassen von $\mathfrak{K}^{(n)}$, das zugleich Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ ist. Dabei kann man die in $\mathsf{A}^{(n)}$ vorkommenden Repräsentanten der bei $W^{(n)}$ transzendenten Klassen von $\mathfrak{K}^{(n)}$ gemäß der Existenzaussage (E) noch willkürlich wählen. Ist also $\mathfrak{T} = \{t\}$ das System aller bei O transzendenten Klassen t[33]) und folglich jedes in $\mathfrak{K}^{(n)}$ liegende t auch bei $W^{(n)}$ transzendent, ist ferner $\mathsf{T} = \{\tau\}$ ein festes Repräsentantensystem der Klassen t, so kann man erreichen, daß das Nullstellensystem $\mathsf{A}^{(n)}$ als Repräsentanten der zu $\mathfrak{K}^{(n)}$ gehörigen t jeweils gerade die festen τ enthält. In dieser Weise denken wir uns die Nullstellensysteme $\mathsf{A}^{(n)}$ gewählt und betrachten die Folge

$(\mathfrak{F}_\mathsf{A})$ $$\mathsf{A}^{(1)}, \mathsf{A}^{(2)}, \ldots, \mathsf{A}^{(n)}, \ldots .$$

$(\mathfrak{F}_\mathsf{A})$ ist nach Definition eine Folge von Nullstellensystemen der einander umfassenden $\mathfrak{K}^{(n)}$ und zugleich eine Folge von Nullstellensystemen für die einander umfassenden $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$. Trotzdem bildet aber $(\mathfrak{F}_\mathsf{A})$ selbst im allgemeinen keine aufsteigende Folge, d. h. $\mathsf{A}^{(n)}$ wird im allgemeinen nicht $\mathsf{A}^{(n-1)}$ umfassen, und bei sukzessiver Konstruktion der $\mathsf{A}^{(n)}$ nach dem im vorigen Paragraphen beschriebenen Verfahren kann man auch gar nicht ohne weiteres erreichen, daß sie einander umfassen.

Um dies einzusehen, braucht man sich nur der im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Konstruktion der $\mathsf{A}^{(n)}$ zu erinnern. Dort wurden die Repräsentanten der bei $W^{(n)}$ transzendenten Klassen von $\mathfrak{K}^{(n)}$ willkürlich gewählt, und es war $\mathsf{A}^{(n)}$ dann eindeutig bestimmt. Nun sind aber die bei $W^{(n-1)}$ transzendenten Klassen von $\mathfrak{K}^{(n-1)}$, soweit sie nicht zu $\mathfrak{T}$ gehören, bei der Wohlordnung $W^{(n)}$ von $\mathfrak{K}^{(n)}$ algebraisch, wie unmittelbar aus der am Schluß von § 7, Nr. 1 angegebenen Eigenschaft der Ordnung O hervorgeht; die Repräsentanten dieser Klassen können also bei der Konstruktion von $\mathsf{A}^{(n)}$ nicht von vornherein in Übereinstimmung mit ihren zu $\mathsf{A}^{(n-1)}$ gehörigen Repräsentanten gewählt werden. Willkürlich wählbar sind bei der Konstruktion von $\mathsf{A}^{(n)}$ vielmehr bloß die Re-

---

[33]) t ist also eine Klasse, die transzendent ist in bezug auf den Unterkörper, der aus allen t bei O vorangehenden Klassen von $\mathfrak{K}$ abgeleitet ist.

präsentanten derjenigen Klassen, die entweder zu $\mathfrak{T}$ gehören oder nicht in $\mathfrak{K}^{(n-1)}$ vorkommen. Danach sind alle Elemente von $\mathsf{A}^{(n)}$, also auch die in $\mathsf{A}^{(n)}$ liegenden Repräsentanten der Klassen aus $\mathfrak{K}^{(n-1)}$, eindeutig bestimmt. Man zeigt leicht durch Beispiele, daß zu bereits konstruiertem $\mathsf{A}^{(n-1)}$ überhaupt kein $\mathsf{A}^{(n)}$ zu existieren braucht, welches $\mathsf{A}^{(n-1)}$ umfaßt.

Von hier aus gesehen erhebt sich offenbar die Aufgabe, die bisher willkürlichen Repräsentanten der bei $W^{(n)}$ transzendenten Klassen vorausschauend jeweils so zu bestimmen, daß $\mathsf{A}^{(n)}$ überhaupt Glied einer aufsteigenden Folge von Nullstellensystemen zu werden vermag. Es ist nun aber wichtig, daß man die direkte Lösung dieser Aufgabe umgehen, vielmehr doch aus der ursprünglichen Folge $\mathfrak{F}_\mathsf{A}$ ein Nullstellensystem für das ganze Idael $\overline{\mathfrak{M}}$ gewinnen kann.

Ist $\mathfrak{a}$ eine beliebige Klasse aus $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^{(r)}$ der erste Körper in der Folge der $\mathfrak{K}^{(n)}$ der $\mathfrak{a}$ enthält, so besitzt $\mathfrak{a}$ offenbar in jedem $\mathfrak{K}^{(n)}$ mit $n \geqq r$ einen Repräsentanten, d. h. $\mathfrak{a}$ ist vermittels der Folge $(\mathfrak{F}_\mathsf{A})$ eine eindeutig bestimmte Repräsentantenfolge

$$\alpha^{(r)}, \alpha^{(r+1)}, \ldots, \alpha^{(n)}, \ldots \qquad (n \geqq r)$$

zugeordnet. $\alpha^{(n)}$ nennen wir dabei den $(n-r)$-ten Repräsentanten von $\mathfrak{a}$.

Wir werden zeigen:

Die Repräsentantenfolgen, die den Klassen $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{K}$ vermittels der Folge $\mathfrak{F}_\mathsf{A}$ zugeordnet sind, sind sämtlich konvergent in B, *und das System* $\mathsf{A} = \{\alpha\}$ *ihrer Grenzelemente stellt ein Repräsentantensystem für die Klassen von $\mathfrak{K}$ dar, das ein Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}$ ist.*

3. Konvergenzbeweis. Um zunächst die Konvergenz der Repräsentantenfolgen zu beweisen, stellen wir fest:

(K) *Für jede Klasse aus dem Körper $\mathfrak{K}^{(s)}$ ist die Differenz ihrer in $\mathsf{A}^{(n)}$ und $\mathsf{A}^{(n-1)}$ liegenden Repräsentanten durch $\mathfrak{p}^{n-s}$ teilbar $(n > s)$.*

Daraus ergibt sich dann sofort, daß die Differenz zwischen dem t-ten und $(t-1)$-ten Repräsentanten einer beliebigen Klasse durch $\mathfrak{p}^t$ teilbar, der Wert dieser Differenz mithin $\geqq t$ ist. Die Repräsentantenfolge jeder Klasse ist daher nach § 2, Nr. 2 konvergent und besitzt daher in dem perfekten Bewertungsring B wirklich ein Grenzelement.

Die Behauptung (K) selbst leiten wir durch doppelte vollständige Induktion her.

Zunächst wenden wir vollständige Induktion nach der Differenz $n - s$ an, wo n und s beide variieren können. Für $n - s = 1$ ist (K) sicher richtig, weil je zwei Repräsentanten derselben Klasse notwendig durch $\mathfrak{p}^1$ teilbar sind. Wir machen nun die erste Induktionsannahme: (K) sei nämlich für alle Differenzen $n - s < t$ bereits bewiesen, wo $1 < t$ ist. Wir wollen bestätigen, daß (K) dann auch im Falle $n - s = t$ gilt.

Dazu betrachten wir einen beliebigen, aber festen Körper $\mathfrak{K}^{(s)}$ und das zugehörige feste $n = s + t$. Wir wenden zum zweiten Male vollständige Induktion an und zwar innerhalb der Wohlordnung $W^{(s)}$ von $\mathfrak{K}^{(s)}$. Sei also $\mathfrak{a}$ eine beliebige Klasse aus $\mathfrak{K}^{(s)}$. Unsere zweite Induktionsannahme lautet: Für alle Klassen aus $\mathfrak{K}^{(s)}$, die $\mathfrak{a}$ vorangehen und für das feste $n = s + t$ sei (K) bereits als richtig erkannt. Diese zweite Induktionsannahme ist offenbar inhaltslos, wenn $\mathfrak{a}$ die Anfangsklasse von $\mathfrak{K}^{(s)}$ ist, so daß wir den Beginn der zweiten Induktion sogleich in den allgemeinen Induktionsschluß mit hineinnehmen können.

Die zweite Induktionsannahme läßt sich noch auf eine andere Gestalt bringen, an die wir unmittelbar anknüpfen werden. Ist nämlich $\mathsf{A}_s'^{(n)}$ bzw. $\mathsf{A}_s'^{(n-1)}$ die Teilmenge

der in $\mathsf{A}^{(n)}$ bzw. $\mathsf{A}^{(n-1)}$ liegenden Repräsentanten aller Klassen von $\mathfrak{K}^{(s)}$, die $\mathfrak{a}$ vorangehen, so ist sie gleichwertig mit der Kongruenz

$$\mathsf{A}_s'^{(n)} \equiv \mathsf{A}_s'^{(n-1)} \bmod \mathfrak{p}^t. \tag{10}$$

Eine ähnliche Kongruenz läßt sich auch aus der ersten Induktionsannahme gewinnen. Da nämlich $n = s + t > s + 1$, also auch $n - 1 \geqq s + 1$ ist, besitzen alle Klassen aus $\mathfrak{K}^{(s+1)}$ in $\mathsf{A}^{(n)}$ und $\mathsf{A}^{(n-1)}$ einen Repräsentanten. Die Differenz zwischen $s + 1$ und n ist gleich $t-1$; nach der ersten Induktionsannahme ist daher für jede Klasse aus $\mathfrak{K}^{(s+1)}$ die Differenz ihres in $\mathsf{A}^{(n)}$ und $\mathsf{A}^{(n-1)}$ liegenden Repräsentanten durch $\mathfrak{p}^{t-1}$ teilbar. Bezeichnet $\mathsf{A}_{s+1}^{(n)}$ bzw. $\mathsf{A}_{s+1}^{(n-1)}$ die Teilmenge der in $\mathsf{A}^{(n)}$ bzw. $\mathsf{A}^{(n-1)}$ liegenden Repräsentanten aller Klassen von $\mathfrak{K}^{(s+1)}$, so liefert das die Kongruenz

$$\mathsf{A}_{s+1}^{(n)} \equiv \mathsf{A}_{s+1}^{(n-1)} \bmod \mathfrak{p}^{t-1}. \tag{11}$$

Auf Grund der Kongruenzen (10) und (11) werden wir nun für die in $\mathsf{A}^{(n)}$ und $\mathsf{A}^{(n-1)}$ liegenden Repräsentanten $\alpha^{(n)}$ und $\alpha^{(n-1)}$ der Klasse $\mathfrak{a}$ dartun:

$$\alpha^{(n)} \equiv \alpha^{(n-1)} \bmod \mathfrak{p}^t. \tag{12}$$

Damit wird dann (K) offenbar durch doppelte vollständige Induktion völlig bewiesen sein.

Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{t}$ eine bei der separierenden Ordnung O transzendente Klasse, so brauchen wir die Kongruenzen (10) und (11) noch nicht, kommen vielmehr direkt zum Ziel. Eine bei O transzendente Klasse besitzt nämlich in $\mathsf{A}^{(n)}$ und $\mathsf{A}^{(n-1)}$ nach Konstruktion denselben festen Repräsentanten $\tau = \alpha^{(n)} = \alpha^{(n-1)}$. Es ist daher sicher $\alpha^{(n)} \equiv \alpha^{(n-1)} \bmod \mathfrak{p}^t$.

Ist dagegen $\mathfrak{a}$ bei O algebraisch, so ist $\mathfrak{a}$ nach der am Schluß von § 7, Nr. 1 angegebenen Eigenschaft der Ordnung O bereits bei der Wohlordnung $W^{(s+1)}$ von $\mathfrak{K}^{(s+1)}$ algebraisch. Zu dem irreduziblen Polynom $\mathfrak{F}(x)$, das durch $\mathfrak{a}$ bei $W^{(s+1)}$ annulliert wird, kommt in $\overline{\mathfrak{M}}^{(s+1)}$ nach Konstruktion sicher ein Polynom $G(u)$ vor, für das $\overline{\Phi}(u) = \mathfrak{a}$ und $\overline{\Phi}(G(x)) = \mathfrak{F}(x)$ ist. $G(x)$ besitzt das Einselement zum höchsten Koeffizienten, und alle seine Koeffizienten liegen in dem Grundring $\overline{Q}^{(s+1)}$, der aus der Teilmenge $U^{(s+1)}$ von U abgeleitet ist, welche ihrerseits durch $\overline{\Phi}$ auf den Körper $\mathfrak{K}^{(s+1)}$ abgebildet wird. Wegen $\overline{\mathfrak{M}}^{(s+1)} \leqq \overline{\mathfrak{M}}^{(n-1)} \leqq \overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ ist $G(u)$ auch in $\overline{\mathfrak{M}}^{(n-1)}$ und $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ enthalten.

Mit Hilfe des Polynoms $G(x)$ nehmen wir nun eine Reduktion der behaupteten Kongruenz (12) vor. Durch die Abbildungen $U^{(s+1)} \mid \mathsf{A}_{s+1}^{(n)}$ bzw. $U^{(s+1)} \mid \mathsf{A}_{s+1}^{(n-1)}$ entsteht nämlich aus $\overline{Q}^{(s+1)}$ jedes Mal ein Unterring von B und damit aus $G(x)$ ein Polynom $\mathsf{G}_n(x)$ bzw. $\mathsf{G}_{n-1}(x)$ mit Koeffizienten aus B und dem Einselement als höchstem Koeffizienten. Da $G(u)$ zu $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ gehört, ist $\mathsf{G}_n(\alpha^{(n)}) = 0$; denn $\mathsf{G}_n(\alpha^{(n)})$ geht aus $G(u)$ durch die Abbildung $U^{(s+1)} \mid \mathsf{A}_{s+1}^{(n)}$ hervor und muß daher verschwinden, weil $\mathsf{A}^{(n)}$ Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ ist. Ganz ebenso erhält man die Gleichung $\mathsf{G}_{n-1}(\alpha^{(n-1)}) = 0$.

Auf Grund der Kongruenzen (10) und (11) werden wir nun zeigen:

(K_G) *Die Polynome* $\mathsf{G}_n(x)$ *und* $\mathsf{G}_{n-1}(x)$, *die beide das Einselement zum höchsten Koeffizienten haben und durch die Repräsentanten* $\alpha^{(n)}$ *bzw.* $\alpha^{(n-1)}$ *von* $\mathfrak{a}$ *annulliert werden, sind mod.* $\mathfrak{p}^t$ *kongruent.*

Aus dieser Aussage (K_G) folgt mit Hilfe des zweiten Henselschen Satzes in der Tat sofort die behauptete Kongruenz (12). Die Polynome $\mathsf{G}_n(x)$ und $\mathsf{G}_{n-1}(x)$ gehen nämlich nach Satz 12 bei Ersetzung ihrer Koeffizienten durch die zugehörigen Klassen mod. $\mathfrak{p}$ in das Polynom $\overline{\Phi}(G(x)) = \mathfrak{F}(x)$ über. $\mathfrak{F}(x)$ ist aber separabel, weil $W^{(s+1)}$ eine separierende

Wohlordnung ist. Für die Polynome $\mathsf{G}_n(x)$ und $\mathsf{G}_{n-1}(x)$ besagt das, daß sie mod. $\mathfrak{p}$ keine mehrfachen Nullstellen besitzen. Die Kongruenz $\mathsf{G}_n(x) \equiv \mathsf{G}_{n-1}(x)$ mod. $\mathfrak{p}^t$ zieht daher gemäß dem zweiten Henselschen Satz für die mod. $\mathfrak{p}$ kongruenten Nullstellen $\alpha^{(n)}$ und $\alpha^{(n-1)}$ wirklich die Kongruenz $\alpha^{(n)} \equiv \alpha^{(n-1)}$ mod. $\mathfrak{p}^t$ nach sich.

Zum Beweis der Aussage (K_G) selbst gehen wir auf die Definition der Polynome $\mathsf{G}_n(x)$ und $\mathsf{G}_{n-1}(x)$ vermittels $G(x)$ zurück und bringen zunächst $G(x)$ auf eine zweckmäßige Gestalt. Dabei benützen wir die Gleichung $\bar{\Phi}(G(x)) = \mathfrak{F}(x)$ und stützen uns wesentlich auf die Tatsache, daß die Koeffizienten von $\mathfrak{F}(x)$ nach der am Schluß von § 7, Nr. 1 angegebenen Eigenschaft der Ordnung O in $\mathfrak{R}_\mathfrak{a}^{(s)}(\mathfrak{C}^p)$ liegen, wo $\mathfrak{C} = \mathfrak{R}^{(s+1)} - \mathfrak{R}^{(s)}$ ist.

Wir verstehen nämlich jetzt unter $U_\mathfrak{a}^{(s)}$ die Teilmenge von U, die durch $\bar{\Phi}$ auf den durch $\mathfrak{a}$ bestimmten Abschnitt von $\mathfrak{R}^{(s)}$ abgebildet werden, setzen $C = U^{(s+1)} - U^{(s)}$, sodaß $\bar{\Phi}(C) = \mathfrak{C}$ ist, und bilden den Grundring $\bar{Q}_V$, der aus der Vereinigungsmenge $V = U_\mathfrak{a}^{(s)} + C^p$ abgeleitet, also wegen $V \leqq U^{(s+1)}$ sicher in $\bar{Q}^{(s+1)}$ enthalten ist. Dann ist offenbar $\bar{\Phi}(\bar{Q}_V) = \mathfrak{R}_\mathfrak{a}^{(s+1)}(\mathfrak{C}^p)$, und $\mathfrak{F}(x)$ besitzt daher über $\bar{Q}_V$ ein Urbildpolynom $F(x)$. Die Polynome $G(x)$ und $F(x)$ haben beide Koeffizienten aus $\bar{Q}^{(s+1)}$ und haben beide dasselbe $\bar{\Phi}$-Bild $\mathfrak{F}(x)$, d. h. die Koeffizienten ihrer Differenz liegen notwendig in dem Ideal $\bar{\mathfrak{N}}^{(s+1)}$ aller Elemente aus $\bar{Q}^{(s+1)}$, die durch $\bar{\Phi}$ in die Null übergehen. Nach Satz 5 besteht aber die Gleichung $\mathfrak{N}^{(s+1)} = (\bar{\mathfrak{M}}^{(s+1)}, \pi)$. Es gilt daher

$$G(x) = F(x) + \pi L(x) + M(x), \tag{13}$$

wo $L(x)$, $M(x)$ Polynome über $\bar{Q}^{(s+1)}$ sind, und die Koeffizienten von $M(x)$ zu $\bar{\mathfrak{M}}^{(s+1)}$ gehören.

Durch die Abbildungen $U^{(s+1)} \mid \mathsf{A}_{s+1}^{(n)}$ bzw. $U^{(s+1)} \mid \mathsf{A}_{s+1}^{(n-1)}$ entstehen aus $F(x)$, $L(x)$, $M(x)$ Polynome $\mathsf{F}_n(x)$, $\mathsf{L}_n(x)$, $\mathsf{M}_n(x)$ bzw. $\mathsf{F}_{n-1}(x)$, $\mathsf{L}_{n-1}(x)$, $\mathsf{M}_{n-1}(x)$. Dabei ist $\mathsf{M}_n(x) = \mathsf{M}_{n-1}(x) = 0$, weil $\mathsf{A}^{(n)}$ und $\mathsf{A}^{(n-1)}$ Nullstellensysteme der Ideale $\bar{\mathfrak{M}}^{(n)}$ und $\bar{\mathfrak{M}}^{(n-1)}$ sind, die beide $\bar{\mathfrak{M}}^{(s+1)}$ umfassen. Man erhält somit aus (13)

$$\mathsf{G}_n(x) = \mathsf{F}_n(x) + p\,\mathsf{L}_n(x), \qquad \mathsf{G}_{n-1}(x) = \mathsf{F}_{n-1}(x) + p\,\mathsf{L}_{n-1}(x)\,.$$

Infolge der Kongruenz (11) ist nach Satz 14

$$\mathsf{L}_n(x) \equiv \mathsf{L}_{n-1}(x) \text{ mod. } \mathfrak{p}^{t-1},$$

demnach

$$p\,\mathsf{L}_n(x) \equiv p\,\mathsf{L}_{n-1}(x) \text{ mod. } \mathfrak{p}^t\,. \tag{14}$$

Für den Beweis von (K_G) kommt es daher nur noch darauf an, die Kongruenz

$$\mathsf{F}_n(x) \equiv \mathsf{F}_{n-1}(x) \text{ mod. } \mathfrak{p}^t$$

herzuleiten. Ihre Richtigkeit erkennt man folgendermaßen.

Die Abbildungen $U^{(s+1)} \mid \mathsf{A}_{s+1}^{(n)}$ und $U^{s+1} \mid \mathsf{A}_{s+1}^{(n+1)}$ erzeugen offenbar für die Teilmenge $V = U_\mathfrak{a}^{(s)} + C^p$ von $\bar{Q}^{(s+1)}$ je eine Abbildung $\psi_n(V)$ und $\psi_{n-1}(V)$. Diese Abbildungen ψ_n und ψ_{n-1} sind mod. $\mathfrak{p}^t$ kongruent, d. h. es ist

$$\psi_n(v) \equiv \psi_{n-1}(v) \text{ mod. } \mathfrak{p}^t \tag{15}$$

für jedes Element v von V. Für ein v aus $U_\mathfrak{a}^{(s)}$ ergibt sich das sofort aus (10), weil

$$\psi_n(U_\mathfrak{a}^{(s)}) = U_\mathfrak{a}^{(s)} \mid \mathsf{A}_s^{\prime(n)}, \qquad \psi_{n-1}(U_\mathfrak{a}^{(s)}) = U_\mathfrak{a}^{(s)} \mid \mathsf{A}_s^{\prime(n-1)}$$

ist. Für ein $v = c^p$ aus C^p hat man andererseits

$$\psi_n(c^p) = \gamma^{(n)p}, \qquad \psi_{n-1}(c^p) = \gamma^{(n-1)p},$$

wo $\gamma^{(n)}$ bzw. $\gamma^{(n-1)}$ die in $\mathsf{A}_{s+1}^{(n)}$ bzw. $\mathsf{A}_{s+1}^{(n-1)}$ enthaltenen Repräsentanten der Klasse $\overline{\Phi}(c)$ bedeuten, für die wiederum nach (11)

$$\gamma^{(n)} = \gamma^{(n-1)} + \delta \quad \text{mit } \delta \equiv 0 \text{ mod. } \mathfrak{p}^{t-1}$$

gilt. Potenzieren mit p liefert

$$\gamma^{(n)p} = \gamma^{(n-1)p} + p\delta\mu + \delta^p ,$$

d. h.

$$\gamma^{(n)p} \equiv \gamma^{(n-1)p} \text{ mod. } \mathfrak{p}^t ,$$

und damit wirklich

$$\psi_n(c^p) \equiv \psi_{n-1}(c^p) \text{ mod. } \mathfrak{p}^t .$$

Damit ist zunächst die Kongruenz (15) allgemein bewiesen. Das Polynom $F(x)$ mit Koeffizienten aus $\overline{Q}_v$ geht nun aber bereits durch die Abbildungen ψ_n und ψ_{n-1} in $\mathsf{F}_n(x)$ bzw. $\mathsf{F}_{n-1}(x)$ über. Nach Satz 13 zieht daher (15) tatsächlich die Kongruenz

$$\mathsf{F}_n(x) \equiv \mathsf{F}_{n-1}(x) \text{ mod. } \mathfrak{p}^t$$

nach sich.

Der Beweis von (K_G) und (K) ist also nunmehr in allen Teilen durchgeführt.

4. Das System der Grenzelemente. Wir betrachten jetzt die Grenzwerte der Repräsentantenfolgen, die den Klassen aus $\mathfrak{K}$ vermittels $(\mathfrak{F}_\mathsf{A})$ zugeordnet sind. Bevor wir zeigen, daß das System $\mathsf{A} = \{\alpha\}$ dieser Grenzelemente ein Repräsentantensystem der Klassen von $\mathfrak{K}$ und ein Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}$ ist, geben wir kurz zwei Folgerungen aus dem Konvergenzsatz (K) der vorigen Nummer an.

Folgerung 1. *Ist* $\mathfrak{a}$ *eine Klasse aus* $\mathfrak{K}^{(s)}$, α *der Grenzwert ihrer Repräsentantenfolge und* $\alpha^{(n)}$ *ihr Repräsentant in* $\mathsf{A}^{(n)} (n > s)$, *so ist* $\alpha - \alpha^{(n)}$ *durch* $\mathfrak{p}^{n-s}$ *teilbar.*

Nach (K) ist nämlich für $m \geqq n$ stets $\alpha^{(m)} - \alpha^{(m-1)} \equiv 0 \text{ mod. } \mathfrak{p}^{n-s}$, d. h. $w(\alpha^{(m)} - \alpha^{(m-1)}) \geqq n - s$. Wegen $\alpha - \alpha^{(n)} = (\alpha - \alpha^{(r)}) + (\alpha^{(r)} - \alpha^{(r-1)}) + \cdots + (\alpha^{(n+1)} - \alpha^{(n)})$ und $w(\alpha - \alpha^{(r)}) > n - s$ bei hinlänglich großem r gilt daher wirklich $w(\alpha - \alpha^{(n)}) \geqq n - s$.

Diese erste Folgerung besagt bereits, daß das System A der Grenzwerte ein Repräsentantensystem für die Klassen von $\mathfrak{K}$ darstellt, denn der Grenzwert α der $\mathfrak{a}$ zugeordneten Repräsentantenfolge ist nach ihr offenbar wieder Repräsentant von $\mathfrak{a}$.

Sei jetzt $D(u)$ ein beliebiges Element aus dem Grundring $\overline{Q}^{(s)}$, der durch $\overline{\Phi}$ auf $\mathfrak{K}^{(s)}$ abgebildet wird; $\mathsf{A}_s^{(n)}$ bzw. A_s bezeichne das Teilsystem der in $\mathsf{A}^{(n)}$ bzw. A liegenden Repräsentanten aller Klassen von $\mathfrak{K}^{(s)}$. Durch die Abbildungen $U^{(s)} \mid \mathsf{A}_s^{(n)}$ bzw. $U^{(s)} \mid \mathsf{A}_s$ geht $\overline{Q}^{(s)}$ jeweils in einen Unterring von B, also $D(u)$ jeweils in ein Element $D(\alpha^{(n)})$ bzw. $D(\alpha)$ von B über.

Folgerung 2. *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty} D(\alpha^{(n)}) = D(\alpha)$, *d. h.* $\lim\limits_{n\to\infty} w\big(D(\alpha) - D(\alpha^{(n)})\big) \to \infty$.

Nach Folgerung 1 ist nämlich $\mathsf{A}_s \equiv \mathsf{A}_s^{(n)} \text{ mod. } \mathfrak{p}^{n-s}$, daher nach Satz 13 $D(\alpha) \equiv D(\alpha^{(n)}) \text{ mod. } \mathfrak{p}^{n-s}$ oder $w\big(D(\alpha) - D(\alpha^{(n)})\big) \geqq n - s$. Das ergibt sofort

$$\lim_{n\to\infty} w\big(D(\alpha) - D(\alpha^{(n)})\big) = \infty .$$

Um nun nachzuweisen, daß das System A der Grenzwerte ein Nullstellensystem von $\overline{\mathfrak{M}}$ ist, gehen wir davon aus, daß $\overline{\mathfrak{M}}$ aus der Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}$ der einander umfassenden $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ durch Übergang zur vollständigen Hülle entspringt. Da der durch die Abbildung $U \mid \mathsf{A}$ erzeugte Homomorphismus von $\overline{Q}$ stetig ist, genügt es also zu zeigen, daß jedes Element von $\mathfrak{M}$ durch $U \mid \mathsf{A}$ in die Null übergeht.

Sei also $N(u)$ ein Element von $\mathfrak{M}$; $N(u)$ liegt dann notwendig in einem $\mathfrak{M}^{(s)}$ und damit in einem Grundring $\overline{Q}^{(s)}$. Sind $N(\alpha^{(n)})$ bzw. $N(\alpha)$ die Elemente von B, die aus $N(u)$ durch die Abbildungen $U^{(s)} \mid \mathsf{A}_s^{(n)}$ bzw. $U^{(s)} \mid \mathsf{A}_s$ entstehen ($n > s$), so ist nach Folgerung 2 $\lim\limits_{n\to\infty} N(\alpha^{(n)}) = N(\alpha)$.

Andererseits ist $N(\alpha^{(n)}) = 0$, weil $N(u)$ zu $\overline{\mathfrak{M}}^{(s)}$ und damit zu $\overline{\mathfrak{M}}^{(n)}$ gehört und $\mathsf{A}^{(n)}$ nach Voraussetzung ein Nullstellensystem von $\mathfrak{M}^{(n)}$ ist. Es ist daher auch $\lim\limits_{n\to\infty} N(\alpha^{(n)}) = 0$, also wirklich $N(\alpha) = 0$.

Damit ist der zu Beginn dieses Paragraphen formulierte Satz völlig bewiesen.

§ 11. Beendigung der Beweise.

Die Beweise unserer Hauptsätze können jetzt mit wenigen Worten zu Ende geführt werden.

Satz 17. *Im charakteristikgleichen Fall ist ein diskret bewerteter perfekter Körper* K *mit dem Restklassenkörper* $\mathfrak{K}$ *analytisch isomorph zu dem nach Potenzen von* x *bewerteten Potenzreihenkörper* $\mathfrak{K}(\overline{x})$ *in einer Unbestimmten* x *mit Koeffizienten aus* $\mathfrak{K}$.

Nach Satz 14′, 15 und 16 enthält nämlich der Bewertungsring B von K stets ein relationstreues Repräsentantensystem Ω für die Klassen von $\mathfrak{K}$. Ist ξ ein von 0 verschiedenes Primelement von B, so läßt sich also jedes Element $\gamma \neq 0$ von K auf eine und nur eine Weise in eine ξ-adische Reihe mit Koeffizienten aus Ω entwickeln

$$\gamma = \omega_s \xi^s + \omega_{s+1}\xi^{s+1} + \cdots \qquad (\omega_s \neq 0),$$

und dabei ist der Wert $w(\gamma)$ von γ gegeben durch den Exponenten s, $w(\gamma) = s$. Da das Repräsentantensystem Ω relationstreu, also selbst ein zu $\mathfrak{K}$ isomorpher Körper ist, stellen diese ξ-adischen Reihen aber gewöhnliche Potenzreihen mit dem Koeffizientenkörper Ω dar, die offenbar nach Potenzen von ξ bewertet sind. Das ergibt unmittelbar die angegebene Behauptung, die mit Satz A der Einleitung übereinstimmt.

Satz 18. *Im charakteristikungleichen Fall enthält ein diskret bewerteter perfekter Körper* K *mit dem Restklassenkörper* $\mathfrak{K}$ *einen* p*-adisch bewerteten perfekten Körper* K_1, *dessen Restklassenkörper zu* $\mathfrak{K}$ *kongruentisomorph ist. Dabei ist die Struktur des Körpers* K_1 *durch den Typus von* $\mathfrak{K}$ *eindeutig bestimmt.*

Ist K *ein* n*-fach verzweigter Körper, so ist* K/K_1 *ein Eisensteinscher Körper* n*-ten Grades.*

Nach Satz 14′, 15 und 16 enthält nämlich der Bewertungsring B von K stets einen p-adisch bewerteten perfekten Unterring $\Omega = \mathsf{B}_1$, dessen Restklassenkörper zu $\mathfrak{K}$ kongruentisomorph ist. Dabei ist B_1 nach Satz 14 zu dem festen Restklassenring $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ isomorph, und zwar ist der Restklassenring $\overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ gemäß seiner in § 8 auseinander gesetzten Bildungsweise insofern fest, als er im charakteristikungleichen Fall für alle diejenigen diskret bewerteten perfekten Körper derselbe ist, deren Restklassenkörper zu $\mathfrak{K}$ isomorph ist. Der Typus von B_1 ist daher durch den Typus von $\mathfrak{K}$ eindeutig bestimmt, und der Quotientenkörper K_1 von B_1 stellt wirklich einen p-adisch bewerteten Unterkörper von K mit zu $\mathfrak{K}$ kongruentisomorphem Restklassenkörper dar, dessen Struktur durch den Typus von $\mathfrak{K}$ eindeutig bestimmt ist.

Besitzt K den Verzweigungsexponenten n, so folgt aus Satz 3 und 4 sofort, daß K/K_1 ein Eisensteinscher Körper n-ten Grades ist.

Aus dem soeben bewiesenen Satz ergibt sich für einen unverzweigten Körper, d. h. einen Körper mit dem Verzweigungsexponenten 1 speziell:

Satz 19. *Im charakteristikungleichen Fall ist die Struktur eines p-adisch bewerteten perfekten Körpers durch den Typus seines Restklassenkörpers eindeutig bestimmt.*

Ferner:

Satz 20. *Läßt man $\mathfrak{K}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für die verschiedenen Typen aller Körper von Primzahlcharakteristik durchlaufen und stellt zu jedem $\mathfrak{K}$ einen Grundring $\overline{Q}$ von der Charakteristik 0 her, dessen Restklassenkörper zu $\mathfrak{K}$ isomorph ist, sowie ein reduziertes Grundideal $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\overline{Q}$, so bilden die Restklassenringe $\mathsf{B}_{\mathfrak{K}} = \overline{Q}/\overline{\mathfrak{M}}$ im charakteristikungleichen Fall ein vollständiges Repräsentantensystem für die verschiedenen Typen perfekter p-adischer Bewertungsringe.*

Die Quotientenkörper $\mathsf{K}_{\mathfrak{K}}$ der Bewertungsringe $\mathsf{B}_{\mathfrak{K}}$ stellen daher im charakteristikungleichen Fall ein Repräsentantensystem dar für die verschiedenen Strukturen p-adisch bewerteter perfekter Körper.

Die Sätze 20, 18 stimmen offenbar mit den Behauptungen B_1 und B_2 der Einleitung überein, so daß nunmehr in der Tat alle angekündigten Resultate vollständig hergeleitet sind.

Eingegangen 24. April 1932.

Die Umkehrung der ebenen quadratischen Cremonatransformation.

Von *Kuno Fladt* in Vaihingen a. F.

---

1. Die allgemeinste ebene quadratische Transformation ist durch die Gleichungen

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho\,\bar{x}_1 &= A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 - A_{23}x_2x_3 - A_{31}x_3x_1 - A_{12}x_1x_2 \\ \varrho\,\bar{x}_2 &= B_{11}x_1^2 + B_{22}x_2^2 + B_{33}x_3^2 - B_{23}x_2x_3 - B_{31}x_3x_1 - B_{12}x_1x_2 \\ \varrho\,\bar{x}_3 &= C_{11}x_1^2 + C_{22}x_2^2 + C_{33}x_3^2 - C_{23}x_2x_3 - C_{31}x_3x_1 - C_{12}x_1x_2 \end{aligned}\right\}$$

gegeben. Sie ist eine Cremonatransformation, wenn diese eindeutig umkehrbar sind, und dies ist bekanntlich der Fall, wenn die drei Kegelschnitte $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = 0$ drei Punkte gemein haben. Die rationalen, vom Verfasser nirgends in der mathematischen Literatur vorgefundenen Bedingungen dafür anzugeben, war der Anlaß zu den vorliegenden, durch die Theorie der ebenen quadratischen Cremonatransformationen ermöglichten Entwicklungen. Die Frage lautet also: Was sind die Koeffizientenbedingungen für die Umkehrung des Systems (A) und wie heißt diese?

2. Ich gebe zuerst die Antwort und schildere dann kurz das Verfahren.

Gemäß dem Rang R der Determinante

$$(1_1)\qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} \\ B_{11} & B_{22} & B_{33} \\ C_{11} & C_{22} & C_{33} \end{vmatrix}$$

hat man vier Fälle zu unterscheiden.

1. *Fall.* $R = 3$. Führt man die Abkürzungen

$$(2_1)\quad \left\{\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{23} & B_{23} & C_{23} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} \\ A_{33} & B_{33} & C_{33} \end{vmatrix} &\equiv D_{23} & \begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ A_{23} & B_{23} & C_{23} \\ A_{33} & B_{33} & C_{33} \end{vmatrix} &\equiv E_{23} & \begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} \\ A_{23} & B_{23} & C_{23} \end{vmatrix} &\equiv F_{23} \\ \begin{vmatrix} A_{31} & B_{31} & C_{31} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} \\ A_{33} & B_{33} & C_{33} \end{vmatrix} &\equiv D_{31} & \begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ A_{31} & B_{31} & C_{31} \\ A_{33} & B_{33} & C_{33} \end{vmatrix} &\equiv E_{31} & \begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} \\ A_{31} & B_{31} & C_{31} \end{vmatrix} &\equiv F_{31} \\ \begin{vmatrix} A_{12} & B_{12} & C_{12} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} \\ A_{33} & B_{33} & C_{33} \end{vmatrix} &\equiv D_{12} & \begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} \\ A_{33} & B_{33} & C_{33} \end{vmatrix} &\equiv E_{12} & \begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} \end{vmatrix} &\equiv F_{12} \end{aligned}\right\}$$

ein, so lauten die gesuchten Bedingungen

$$(B_1)\quad \left\{\begin{array}{|l|}\hline \dfrac{E_{23}F_{23}-\Delta^2}{D_{23}}=\dfrac{E_{12}F_{31}-E_{31}F_{12}}{\Delta} \\ \dfrac{F_{31}D_{31}-\Delta^2}{E_{31}}=\dfrac{F_{23}D_{12}-F_{12}D_{23}}{\Delta} \\ \dfrac{D_{12}E_{12}-\Delta^2}{F_{12}}=\dfrac{D_{31}E_{23}-D_{23}E_{31}}{\Delta} \\ \hline \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Delta E_{12}+E_{31}F_{23}}{D_{31}}=\dfrac{\Delta F_{31}+E_{23}F_{12}}{D_{12}} \\ \dfrac{\Delta F_{23}+F_{12}D_{31}}{E_{12}}=\dfrac{\Delta D_{12}+F_{31}D_{23}}{E_{23}} \\ \dfrac{\Delta D_{31}+D_{23}E_{12}}{F_{23}}=\dfrac{\Delta E_{23}+D_{12}E_{31}}{F_{31}} \end{array}\right\}.$$

Das System (B_1) enthält aber, wie man sich leicht überzeugt und wie aus dem Folgenden klar wird, nur *drei* unabhängige, etwa die umränderten, Bedingungen. Es gilt ferner die

Regel: Ist einer der von Δ verschiedenen Nenner in (B_1) gleich Null, so verschwindet auch der zugehörige Zähler, der betreffende Bruch scheidet aus (B_1) als Seite einer Gleichung aus, und die Zahl der unabhängigen Bedingungen erhöht sich um eins.

Die Umkehrung des Systems (A) lautet

$$((A_1))\quad \left\{\begin{array}{l} \varrho x_1 = \dfrac{E_{12}F_{31}-E_{31}F_{12}}{\Delta}\breve{x}_1^2 + D_{23}\breve{x}_2\breve{x}_3 - E_{23}\breve{x}_3\breve{x}_1 - F_{23}\breve{x}_1\breve{x}_2 \\ \varrho x_2 = \dfrac{F_{23}D_{12}-F_{12}D_{23}}{\Delta}\breve{x}_2^2 - D_{31}\breve{x}_2\breve{x}_3 + E_{31}\breve{x}_3\breve{x}_1 - F_{31}\breve{x}_1\breve{x}_2 \\ \varrho x_3 = \dfrac{D_{31}E_{23}-D_{23}E_{31}}{\Delta}\breve{x}_3^2 - D_{12}\breve{x}_2\breve{x}_3 - E_{12}\breve{x}_3\breve{x}_1 + F_{12}\breve{x}_1\breve{x}_2 \end{array}\right\},$$

wo die $\breve{x}_1|\breve{x}_2|\breve{x}_3$ durch die Gleichungen

$$(3_1)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta\bar{x}_1 = A_{11}\breve{x}_1 + A_{22}\breve{x}_2 + A_{33}\breve{x}_3 \\ \Delta\bar{x}_2 = B_{11}\breve{x}_1 + B_{22}\breve{x}_2 + B_{33}\breve{x}_3 \\ \Delta\bar{x}_3 = C_{11}\breve{x}_1 + C_{22}\breve{x}_2 + C_{33}\breve{x}_3 \end{array}\right\}$$

bestimmt sind.

2. *Fall.* $R=2$, d. h. $\Delta=0$. Jetzt kann man durch eine lineare Transformation immer erreichen, daß z. B. $C_{11}=C_{22}=C_{33}=0$ wird, während die Unterdeterminanten

$$(1_2)\qquad C^{11}\equiv\begin{vmatrix} A_{22} & A_{33} \\ B_{22} & B_{33}\end{vmatrix},\quad C^{22}=\begin{vmatrix} A_{33} & A_{11} \\ B_{33} & B_{11}\end{vmatrix},\quad C^{33}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} \\ B_{11} & B_{22}\end{vmatrix}$$

nicht alle verschwinden. Führt man die Abkürzungen

$$(2_2)\quad \left\{\begin{array}{|l|l|l|}\hline \begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} & 0 \\ A_{31} & B_{31} & C_{31} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12}\end{vmatrix}\equiv G_{11} & \begin{vmatrix} A_{23} & B_{23} & C_{23} \\ A_{11} & B_{11} & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12}\end{vmatrix}\equiv H_{11} & \begin{vmatrix} A_{23} & B_{23} & C_{23} \\ A_{31} & B_{31} & C_{31} \\ A_{11} & B_{11} & 0\end{vmatrix}\equiv I_{11} \\ \begin{vmatrix} A_{22} & B_{22} & 0 \\ A_{31} & B_{31} & C_{31} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12}\end{vmatrix}\equiv G_{22} & \begin{vmatrix} A_{23} & B_{23} & C_{23} \\ A_{22} & B_{22} & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12}\end{vmatrix}\equiv H_{22} & \begin{vmatrix} A_{23} & B_{23} & C_{23} \\ A_{31} & B_{31} & C_{31} \\ A_{22} & B_{22} & 0\end{vmatrix}\equiv I_{22} \\ \begin{vmatrix} A_{33} & B_{33} & 0 \\ A_{31} & B_{31} & C_{31} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12}\end{vmatrix}\equiv G_{33} & \begin{vmatrix} A_{23} & B_{23} & C_{23} \\ A_{33} & B_{33} & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12}\end{vmatrix}\equiv H_{33} & \begin{vmatrix} A_{23} & B_{23} & C_{23} \\ A_{31} & B_{31} & C_{31} \\ A_{33} & B_{33} & 0\end{vmatrix}\equiv I_{33} \\ \hline \end{array}\right\}$$

ein, welche die Beziehungen

$$(2_2)\quad \left\{\begin{array}{ll} C_{23}G_{11}+C_{31}H_{11}+C_{12}I_{11}=0 & C^{11}G_{11}+C^{22}G_{22}+C^{33}G_{33}=0 \\ C_{23}G_{22}+C_{31}H_{22}+C_{12}I_{22}=0 & C^{11}H_{11}+C^{22}H_{22}+C^{33}H_{33}=0 \\ C_{23}G_{33}+C_{31}H_{33}+C_{12}I_{33}=0 & C^{11}I_{11}+C^{22}I_{22}+C^{33}I_{33}=0 \end{array}\right\}$$

zur Folge haben, so lauten die gesuchten Bedingungen

$$(B_2) \qquad \left.\begin{aligned} C^{11}\,G_{11} + C^{22}\,C^{33}\,C_{23} &= 0 \\ C^{22}\,H_{22} + C^{33}\,C^{11}\,C_{31} &= 0 \\ C^{33}\,I_{33} + C^{11}\,C^{22}\,C_{12} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Die Umkehrung des Systems (A) aber lautet

$$((A_2)) \qquad \left.\begin{aligned} \varrho x_1 &= \frac{G_{11}}{C^{33}}\,\check{x}_1^2 + \frac{G_{33}}{C^{22}}\,\check{x}_3^2 - \frac{H_{22}}{C^{33}}\,\check{x}_2\check{x}_3 - \frac{H_{33}+C^{11}C_{31}}{C^{11}}\,\check{x}_3\check{x}_1 + C_{23}\check{x}_1\check{x}_2 \\ \varrho x_2 &= \frac{H_{22}}{C^{33}}\,\check{x}_2^2 + \frac{H_{33}}{C^{11}}\,\check{x}_3^2 - \frac{G_{33}+C^{22}C_{23}}{C^{22}}\,\check{x}_2\check{x}_3 - \frac{G_{11}}{C^{33}}\,\check{x}_3\check{x}_1 + C_{31}\check{x}_1\check{x}_2 \\ \varrho x_3 &= C_{12}(\check{x}_3^2 - \check{x}_1\check{x}_2) \end{aligned}\right\},$$

wo die $\check{x}_1 | \check{x}_2 | \check{x}_3$ durch die Gleichungen

$$(3_2) \qquad \left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= A_{11}\check{x}_1 + A_{22}\check{x}_2 + A_{12}\check{x}_3 \\ \bar{x}_2 &= B_{11}\check{x}_1 + B_{22}\check{x}_2 + B_{12}\check{x}_3 \\ \bar{x}_2 &= \qquad\qquad\qquad C_{12}\check{x}_3 \end{aligned}\right\}$$

bestimmt sind.

3. *Fall.* $R = 1$, d. h. $C^{11} = C^{22} = C^{33} = 0$. Jetzt kann man durch eine lineare Transformation erreichen, daß $B_{11} = B_{22} = B_{33} = C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0$ wird, während die Größen

$$(1_3) \qquad A_{11},\ A_{22},\ A_{33}$$

nicht alle verschwinden. Bezeichnet man die Unterdeterminanten von A_{23}, A_{31}, A_{12} in der Determinante

$$(3_3') \qquad \Delta' \equiv \begin{vmatrix} A_{23} & B_{23} & C_{23} \\ A_{31} & B_{31} & C_{31} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} \end{vmatrix}$$

mit A^{23}, A^{31}, A^{12}, so lautet die *eine* Bedingungsgleichung, die sich in einem der drei möglichen, durch zyklische Vertauschung auseinander folgenden Fälle ergibt,

$$(B_3) \qquad A^{23}\Delta' = A_{11}A^{12}A^{31}.$$

Die Umkehrung des Systems (A) aber lautet

$$((A_3)) \qquad \left.\begin{aligned} \varrho x_1 &= \quad \Delta'\check{x}_2\check{x}_3 \\ \varrho x_2 &= -A_{11}A^{31}\check{x}_3^2 + \check{x}_3\check{x}_1 \\ \varrho x_3 &= -A_{11}A^{12}\check{x}_2^2 + \check{x}_1\check{x}_2 \end{aligned}\right\},$$

wo die $\check{x}_1 | \check{x}_2 | \check{x}_3$ durch die Gleichungen

$$(3_3) \qquad \left.\begin{aligned} \Delta' x_1 &= A_{23}\check{x}_1 + B_{23}\check{x}_2 + C_{23}\check{x}_3 \\ \Delta' x_2 &= A_{31}\check{x}_1 + B_{31}\check{x}_2 + C_{31}\check{x}_3 \\ \Delta' x_3 &= A_{12}\check{x}_1 + B_{21}\check{x}_2 + C_{21}\check{x}_3 \end{aligned}\right\}$$

bestimmt sind.

4. *Fall.* $R = 0$. Dann unterscheidet sich die quadratische Transformation nur durch eine Kollineation von der Normalform

$$\varrho\bar{x}_1 = x_2x_3, \quad \varrho\bar{x}_2 = x_3x_1, \quad \varrho\bar{x}_3 = x_1x_2\,.$$

3. Der Weg zu den Bedingungen und zur Umkehrung ist im Falle $R = 3$ folgender. Da jede ebene quadratische Cremonatransformation durch Gleichungen von der Form

$$(C)\qquad \left\{\begin{aligned}&(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)\,\bar{x}_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)\,\bar{x}_2\\&\qquad\qquad+(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)\,\bar{x}_3=0\\&(b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3)\,\bar{x}_1+(b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3)\,\bar{x}_2\\&\qquad\qquad+(b_{31}x_1+b_{32}x_2+b_{33}x_3)\,\bar{x}_3=0\end{aligned}\right\}$$

gegeben ist, so ist (A) eine solche, wenn sie in die Form (C) übergeführt werden kann. Kombiniert man (A) linear mit den Faktoren

$$u_{11}x_1+u_{12}x_2+u_{13}x_3\,|\,u_{21}x_1+u_{22}x_2+u_{23}x_3\,|\,u_{31}x_1+u_{32}x_2+u_{33}x_3,$$

so erhält man für die u_{ik}, unter Benutzung geeigneter Abkürzungen λ_{ik}, das Gleichungssystem

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&A_{11}u_{11}+B_{11}u_{21}+C_{11}u_{31}=0 && A_{11}u_{12}+B_{11}u_{22}+C_{11}u_{32}=\lambda_{12}\\&&& A_{11}u_{13}+B_{11}u_{23}+C_{11}u_{33}=\lambda_{13}\\&A_{22}u_{11}+B_{22}u_{21}+C_{22}u_{31}=\lambda_{21} && A_{22}u_{12}+B_{22}u_{22}+C_{22}u_{32}=0\\&&& A_{22}u_{13}+B_{22}u_{23}+C_{22}u_{33}=\lambda_{23}\\&A_{33}u_{11}+B_{33}u_{21}+C_{33}u_{31}=\lambda_{31} && A_{33}u_{12}+B_{33}u_{22}+C_{33}u_{32}=\lambda_{32}\\&&& A_{33}u_{13}+B_{33}u_{23}+C_{33}u_{33}=0\end{aligned}\right\}$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&A_{23}u_{11}+B_{23}u_{21}+C_{23}u_{31}=\lambda_{11} && A_{23}u_{12}+B_{23}u_{22}+C_{23}u_{32}=\lambda_{23}\\&&& A_{23}u_{13}+B_{23}u_{23}+C_{23}u_{33}=\lambda_{32}\\&A_{31}u_{11}+B_{31}u_{21}+C_{31}u_{31}=\lambda_{13} && A_{31}u_{12}+B_{31}u_{22}+C_{31}u_{32}=\lambda_{22}\\&&& A_{31}u_{13}+B_{31}u_{23}+C_{31}u_{33}=\lambda_{31}\\&A_{12}u_{11}+B_{12}u_{21}+C_{12}u_{31}=\lambda_{12} && A_{12}u_{12}+B_{12}u_{22}+C_{12}u_{32}=\lambda_{21}\\&&& A_{12}u_{13}+B_{12}u_{23}+C_{12}u_{33}=\lambda_{33}\end{aligned}\right\}$$

mit der Bedingung

$$(6)\qquad \lambda_{11}+\lambda_{22}+\lambda_{33}=0$$

und aus ihm durch Elimination der u_{ik} und λ_{ii} das System von Bedingungsgleichungen für die λ_{ik}

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{cccccc}D_{13}\lambda_{12}+D_{12}\lambda_{13}+E_{12}\lambda_{23}+E_{23}\lambda_{21}+F_{23}\lambda_{31}+F_{31}\lambda_{32}=0\\ -\Delta\ \lambda_{12} \cdot \cdot +E_{12}\lambda_{21}+F_{12}\lambda_{31} \cdot =0\\ \cdot -\Delta\ \lambda_{13} \cdot +E_{31}\lambda_{21}+F_{31}\lambda_{31} \cdot =0\\ D_{23}\lambda_{12} \cdot -\Delta\ \lambda_{23} \cdot \cdot +F_{23}\lambda_{32}=0\\ D_{12}\lambda_{12} \cdot \cdot -\Delta\ \lambda_{21} \cdot +F_{12}\lambda_{32}=0\\ \cdot D_{31}\lambda_{13}+E_{31}\lambda_{23} \cdot -\Delta\ \lambda_{31} \cdot =0\\ \cdot D_{23}\lambda_{13}+E_{23}\lambda_{23} \cdot \cdot -\Delta_{32}\lambda_{32}=0\end{array}\right\}.$$

Da sich nun *zwei voneinander unabhängige* Gleichungen der Form (B) ergeben müssen, so müssen zwei der Größen λ_{ik} willkürlich bleiben, d. h. das System (7) muß den Rang 4 besitzen. Wählt man etwa λ_{21} und λ_{31} als solche unabhängige Parameter, so erhält man unter der vorläufigen Voraussetzung $F_{12}\neq 0$ mittels (7_2) bis (7_5) λ_{12}, λ_{13}, λ_{23}, λ_{32} in Funktion von λ_{21} und λ_{31}. Die übrigen Gleichungen (7) müssen dann in λ_{21} und λ_{31} identisch erfüllt sein. Man zeigt durch eine überraschend einfache und durchsichtige Rechdaß sich nung, so aus (7_6) die zwei voneinander unabhängigen Gleichungen

$$(8)\qquad \frac{F_{31}D_{31}-\Delta^2}{E_{31}}=\frac{F_{23}D_{12}-F_{12}D_{23}}{\Delta}=\frac{\Delta F_{23}+F_{12}D_{31}}{E_{12}}$$

einstellen. Ebenso liefert (7_7) die zwei Bedingungen

$$(9)\qquad \frac{E_{23}F_{23}-\Delta^2}{D_{23}}=\frac{E_{12}F_{31}-E_{31}F_{12}}{\Delta}=\frac{\Delta F_{31}+E_{23}F_{12}}{D_{12}}.$$

Aber von ihnen ist nur *eine* von (8) unabhängig, die andere folgt sofort aus den zwei Gleichungen (8) und der andern Gleichung (9). Endlich liefert (7_1) zwei Bedingungen, die von den bisherigen nur in der Form verschieden sind. So kommt man zu dem System (B_1). Man überzeugt sich leicht, daß die ganze Herleitung auch gilt, wenn D_{23} und E_{31} verschwinden, und durch Rückgang zum System (7), daß bei Beachtung der oben angegebenen *Regel* das System (B_1) auch für $D_{23} = E_{31} = F_{12} = 0$ gilt, wo es am einfachsten

$$(B_1) \qquad \left\{\begin{array}{ll} D_{23} = 0 & E_{23}F_{23} - \Delta^2 = 0 \\ E_{31} = 0 & F_{31}D_{31} - \Delta^2 = 0 \\ F_{12} = 0 & D_{12}E_{21} - \Delta^2 = 0 \end{array}\right\}$$

lautet.

Führt man nun die Werte von λ_{12}, λ_{13}, λ_{23}, λ_{32} in die Gleichungen (4) ein, so erhält man die u_{ik} in Funktion von λ_{21} und λ_{31}. Die a_{ik} und b_{ik} ergeben sich dann am einfachsten, wenn man $\lambda_{21} = 1$, $\lambda_{31} = 0$ oder $\lambda_{21} = 0$, $\lambda_{31} = 1$ setzt. (C) geht dann unter Beachtung von (3_1) in

$$(C_1') \quad \left\{\begin{array}{l} (E_{12}x_1 + E_{31}x_3)\,\check{x}_1 + \quad (\Delta x_1 - D_{31}x_3) \quad \check{x}_2 - \dfrac{D_{12}E_{12} - \Delta^2}{F_{12}}\, x_2\check{x}_3 = 0 \\ (F_{12}x_1 + F_{31}x_3)\,\check{x}_1 - \dfrac{F_{23}D_{12} - F_{12}D_{23}}{\Delta}\, x_3\check{x}_2 + (\Delta x_1 - D_{12}x_2)\,\check{x}_3 = 0 \end{array}\right\}$$

über, das unter Benutzung von (B_1) nach $x_1|x_2|x_3$ aufgelöst $((A_1))$ liefert.

4. Im Falle $R = 2$ ist der Gang der Rechnung derselbe. Nur wählt man etwa λ_{12} und λ_{21} als unabhängige Parameter und bestimmt die u_{ik} aus den Gleichungen (4_1), (4_2) und (5_3). Im Falle $R = 1$ endlich erhält man zunächst zwei Möglichkeiten: $u_{11} = 0$, $u_{12} = 0$, $A_{33} = 0$, $A_{11}A_{22} \neq 0$ und $u_{11} = 0$, $A_{22} = 0$, $A_{33} = 0$, $A_{11} \neq 0$, von denen die erste ausscheidet, was auch geometrisch einleuchtet. Man wählt λ_{22} und λ_{33} als unabhängige Parameter und findet so (B_3) und $((A_3))$.

Eingegangen 9. August 1932.

Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers.

Von *L. Rédei* in Mezötur (Ungarn) und *H. Reichardt* in Marburg (Lahn).

Der vorliegende Satz nebst Anwendung stammt vom Erstgenannten. Der ursprüngliche Beweis wurde dann vom Zweitgenannten bedeutend vereinfacht, nachdem er durch die freundliche Vermittlung von Herrn H. Hasse davon Kenntnis erhalten hatte.

Über die im engeren Sinne genommene absolute Klassengruppe eines quadratischen Zahlkörpers sind bisher nur die folgenden allgemeingültigen Tatsachen bekannt: die Ordnung der Gruppe, d. h. die Klassenzahlformeln von Dirichlet, und der Satz von Gauß über die Anzahl der Geschlechter, d. h. über die Anzahl der durch 2 teilbaren Invarianten der Gruppe. (Die Invarianten einer abelschen Gruppe sind, wie üblich, die Ordnungszahlen der Elemente eines beliebigen unabhängigen Basissystems.) Überdies haben wir [1]) ein Kriterium für das Vorhandensein einer durch 4 teilbaren Invariante aufgestellt. Das Resultat hatte sich aus einem Vergleich der beiden genannten Sätze ergeben. Wir ermittelten nämlich aus den Klassenzahlformeln, in welchen Fällen die Klassenzahl eine höhere Potenz von 2 enthält, als der Gaußsche Satz angibt: in diesen und nur in diesen Fällen gibt es unter den geraden Invarianten eine durch 4 teilbare.

Wir werden in dieser Arbeit den Satz von Gauß bedeutend erweitern. Wir werden nämlich die genaue Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe bestimmen [2]). Das Verfahren wird kurz das folgende sein: Nach Aufstellen sämtlicher relativ-zyklischer Oberkörper 4. Grades von der Relativdiskriminante 1 läßt sich die fragliche Anzahl mit Hilfe der Klassenkörpertheorie angeben.

Der zu beweisende Satz wird sich mit dem Gaußschen Satze zusammen in einheitlicher Weise aussprechen lassen; beide scheinen nur einen Teil einer allgemeineren Gesetzmäßigkeit zu bilden. Beachtenswert ist auch der Umstand, daß der Lagrangesche Satz

---

[1]) L. Rédei, Über die Klassenzahl des imaginären quadratischen Zahlkörpers, dieses Journal **159** (1928), S. 210—219. — Ungarisch: unter dem nämlichen Titel, Math. u. Naturwiss. Anzeiger d. Ung. Akademie **44** (1927), S. 230—246; Über die Klassenzahl und Fundamentaleinheit des reellen quadratischen Zahlkörpers, Über die Klassenzahl des quadratischen Zahlkörpers, der nämliche Anzeiger **48** (1931), S. 648—682 bzw. S. 683—707. — Das Endresultat befindet sich in der letzten Arbeit (S. 707). Für die Literatur siehe noch die Einleitung der erstenerwähnten Arbeit. — Die vorliegende Arbeit wurde von L. Rédei in weniger einfacher Betrachtung in d. ung. Akad. d. Wiss. vorgelesen und erscheint im erwähnten Anzeiger.

[2]) Die vorhergehenden Forschungen haben genau das Kriterium für das Vorhandensein einer solchen Invariante festgestellt. Mit jenem Verfahren ist es natürlich unmöglich, die jetzt erzielte Anzahl zu bestimmen; wenn man auch die genaue Potenz von 2 in der Klassenzahl festgestellt hätte, so wüßte man im allgemeinen doch noch nicht die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten. Somit bietet jenes vorige Verfahren weniger, und die erwähnten Arbeiten werden in der vorliegenden unbeachtet gelassen. Jedoch wäre diese Arbeit ohne die Anregung der vorhergehenden nicht zustande gekommen.

über die Lösbarkeit der Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ eine wichtige Rolle spielen wird; mit seiner Hilfe bewies Arndt [3]) den Satz von Gauß.

Als einfache Anwendung ergibt sich wieder die von uns ergänzte Dirichlet-Tanosche hinreichende Bedingung für das Vorhandensein von Einheiten mit negativer Norm in einem quadratischen Zahlkörper [4]).

1. Es bedeute R den rationalen Zahlkörper, k einen beliebigen quadratischen Zahlkörper von der Diskriminante D. Wir nennen D kurz Diskriminantenzahl [5]).

Sind D_1, D_2 Diskriminantenzahlen und $D = D_1 D_2$, oder ist eine der Zahlen D_1, D_2 gleich 1 (die andere D), *so nennen wir das Zahlenpaar D_1, D_2 eine D-Zerfällung*; ersichtlich ist dann $(D_1, D_2) = 1$. D_1, D_2 und D_2, D_1 seien als nicht-verschiedene D-Zerfällungen, 1, D als uneigentliche D-Zerfällung bezeichnet.

Gelten noch überdies $\left(\frac{D_1}{p}\right) = 1$ für $p \mid D_2$ und $\left(\frac{D_2}{p}\right) = 1$ für $p \mid D_1$, *so nennen wir D_1, D_2 eine D-Zerfällung zweiter Art.* Dabei ist $\left(\frac{D_i}{p}\right)$ das Kroneckersche Symbol, p Primzahl, und „|" das Zeichen für die Teilbarkeit. Die uneigentliche D-Zerfällung ist von zweiter Art.

k_4 sei unverzweigt und zyklisch vom Grad 4 über k. D muß dann mindestens zwei verschiedene Primzahlen enthalten [6]). Zwischen k und k_4 liegt *ein* Körper k_2, der unverzweigt und quadratisch über k ist. k_2 hat bekanntlich die Form $k_2 = R(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$, wobei D_1, D_2 auch Diskriminantenzahlen sind und $D = D_1 D_2$ ist, d. h. D_1, D_2 eine eigentliche D-Zerfällung ist.

k_4 ist Klassenkörper über k zu einer Idealgruppe H mit dem Modul p_∞ [7]); die Nebenklassen nach H seien C, C^2, C^3 ($C^4 = H$). H enthält alle rationalen Ideale, also folgt aus $\mathfrak{a} < C^a$, daß $\bar{\mathfrak{a}} < C^{-a}$, wobei $\bar{\mathfrak{a}}$ zu $\mathfrak{a}$ konjugiert ist. Daher ist $\overline{H} = H$, $\overline{C} = C^{-1}$. k_4 ist daher ein absolut galoisscher, nicht-abelscher Körper [8]) vom Grad 8, und seine Gruppe $\mathfrak{G}$ ist die Diedergruppe der Ordnung 8. $\mathfrak{G}$ kann nämlich nicht die Quaternionengruppe [9]) sein: Wäre das doch der Fall, so enthielte $\mathfrak{G}$ genau eine Untergruppe $\mathfrak{J}$ der Ordnung 2 und drei zyklische Untergruppen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ der Ordnung 4. Da das alle Untergruppen sind, ist etwa $\mathfrak{H} \longleftrightarrow R(\sqrt{D})$, $\mathfrak{H}_1 \longleftrightarrow R(\sqrt{D_1})$ und $\mathfrak{J} \longleftrightarrow k_2$ im Sinne der eineindeutigen Zuordnung der galoisschen Theorie. Ist nun $p \mid D$, so ist in k $p = \mathfrak{p}^2$. Ist $\mathfrak{P}$ Primteiler von $\mathfrak{p}$ in k_4, so ist $\mathfrak{p}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$ [10]), also $p(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}^2$. Die Trägheitsgruppe [11]) von $\mathfrak{P}$ ist daher $\mathfrak{J}$, und die Trägheitsgruppe zu $\mathfrak{P}$ für k_4/k ist dann der Durchschnitt $[\mathfrak{H}, \mathfrak{J}] = \mathfrak{J}$; $\mathfrak{p}$ wäre also doch verzweigt in k_4.

---

[3]) Über die Anzahl der Genera der quadratischen Formen, dieses Journal **56** (1858).

[4]) Vgl. die dritte unter [1]) erwähnte Arbeit.

[5]) Bekanntlich ist D frei von ungeraden Quadratzahlen, und es ist $D \equiv 1 \pmod 4$ oder $D \equiv 12 \pmod{16}$ oder $D \equiv 8 \pmod{16}$.

[6]) Sonst ist nämlich die Klassenzahl von k ungerade, also kein unverzweigter abelscher Oberkörper von geradem Relativgrad über k vorhanden.

[7]) H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper (im folgenden kurz mit „Bericht" zitiert), Jahresbericht D. M.-V.; Teil Ia, §§ 2—4.

[8]) Siehe Bericht, Teil II, § 5.

[9]) Die Diedergruppe: $S^4 = 1$, $T^2 = 1$, $T^{-1}ST = S^{-1}$ und die Quaternionengruppe: $S_1^2 = S_2^2 = J$, $J^2 = 1$, $S_1 S_2 = J S_2 S_1$ sind bekanntlich die beiden einzigen nicht-abelschen Gruppen der Ordnung 8.

[10]) $\mathfrak{p}(\mathfrak{P})$ bezeichnet die genau in $\mathfrak{p}$ steckende Potenz von $\mathfrak{P}$.

[11]) Bericht, Teil Ia, § 8, insbesondere (4.), (11.) und (12.), was jetzt öfters angewendet wird.

Es ist daher $\mathfrak{G} = \{S, T\}$ mit $S^4 = T^2 = (ST)^2 = 1$. Die Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind folgende:

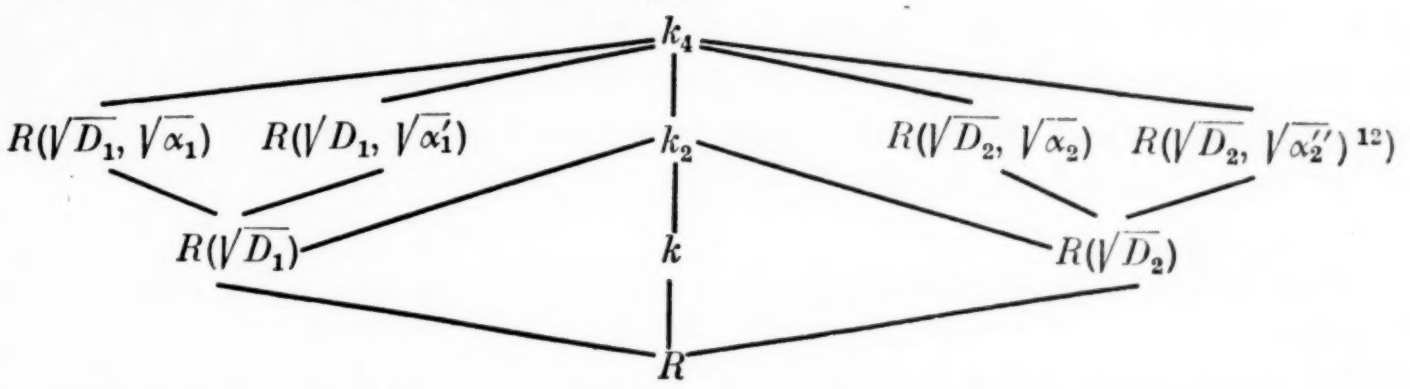
$\mathfrak{H} = \{S\}$ zyklisch von der Ordnung 4, $\quad \mathfrak{H} \longleftrightarrow k$;

$\mathfrak{H}_1 = \{S^2, T\}$ abelsch vom Typus (2, 2), $\quad \mathfrak{H}_1 \longleftrightarrow R(\sqrt{D_1})$;

$\mathfrak{H}_2 = \{S^2, ST\}$ abelsch vom Typus (2, 2), $\quad \mathfrak{H}_2 \longleftrightarrow R(\sqrt{D_2})$;

$\{S^2\}$ invariant in $\mathfrak{G}$ und von der Ordnung 2, $\quad \{S^2\} \longleftrightarrow k_2$;

$\{T\}$ und $\{S^2T\}$ sind konjugiert und von der Ordnung 2; ebenso $\{ST\}$ und $\{S^3T\}$. Die Unterkörper von k_4 sind daher folgende:



Dabei ist $\alpha_1 < R(\sqrt{D_1})$, $\alpha_2 < R(\sqrt{D_2})$, und in k_2 bedeutet „$'$“ den Automorphismus $(\sqrt{D_1} \to -\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2} \to \sqrt{D_2})$ und „$''$“ den Automorphismus $(\sqrt{D_1} \to \sqrt{D_1}, \sqrt{D_2} \to -\sqrt{D_2})$.

Es sei jetzt $p | D_1$. Dann ist in k $p = \mathfrak{p}^2$, und, wenn $\mathfrak{P}$ Primteiler von $\mathfrak{p}$ in k_4, $\mathfrak{p}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$, also $p(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}^2$. Die Trägheitsgruppe zu $\mathfrak{P}$ für k_4/R bzw. k_4/k ist von der Ordnung 2 bzw. 1. In $R(\sqrt{D_1})$ ist ebenfalls $p = \mathfrak{q}^2$, also $\mathfrak{q}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$, d. h. die Trägheitsgruppe für $k_4/R(\sqrt{D_1})$ ist 1. Ist $\mathfrak{G}_T$ die Trägheitsgruppe für k_4/R, so ist daher

$$[\mathfrak{G}_T, \{S\}] = [\mathfrak{G}_T, \{S^2, T\}] = 1.$$

$\mathfrak{G}_T$ ist also entweder $\{ST\}$ oder $\{S^3T\}$. Da die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{G}_Z$ von $\mathfrak{P}$ für k_4/R $\mathfrak{G}_T$ invariant enthält, ist $\mathfrak{G}_Z \neq \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{G}_Z \leqq \{S^2, ST\}$. Daher ist $R(\sqrt{D_2})$ im Zerlegungskörper von $\mathfrak{P}$ enthalten; das zu $\mathfrak{P}$ gehörige Primideal in $R(\sqrt{D_2})$ ist daher von Grad und Ordnung 1 bezüglich p, d. h. es ist $\left(\frac{D_2}{p}\right) = 1$. Vertauschen wir D_1 und D_2, so folgt:

D_1, D_2 ist eine eigentliche D-Zerfällung zweiter Art.

2. Es möge jetzt umgekehrt D_1, D_2 eine eigentliche D-Zerfällung zweiter Art bedeuten. Dann hat die Gleichung

$$x^2 - D_1 y^2 - D_2 z^2 = 0 \quad (1)$$ [13]) [14])

eine Lösung in ganzen rationalen Zahlen so, daß die drei Glieder der linken Seite keinen Teiler gemeinsam haben; dann sind also x, $D_1 y$, $D_2 z$ paarweise relativ prim. Es läßt sich daher voraussetzen, daß $D_2 z$ ungerade ist. Dann ist x ungerade, während $D_1 y$ gerade ist.

Wir setzen

$$X = x + y\sqrt{D_1}. \quad (2)$$

---

[12]) Die gerade oder schräg nach oben zielenden Striche deuten die Relation „ist enthalten in“ graphisch an.

[13]) Siehe z. B. Dirichlet-Dedekind, Vorl. üb. Zahlentheorie (IV. Aufl. 1894), S. 418—432.

[14]) Nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz folgt leicht, daß bei einer D-Zerfällung zweiter Art D_1 und D_2 nicht beide negativ sind.

Bezeichnet wieder k_2 den Körper $R(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$, so ist nach (1) und (2) leicht ersichtlich $k_2(\sqrt{X})/k$ ein *galoisscher Körper vom vierten Grad*, noch mehr, er ist *zyklisch*. Es ist nämlich $S = (\sqrt{X} \to \sqrt{Y},\ \sqrt{D_1} \to -\sqrt{D_1},\ \sqrt{D_2} \to -\sqrt{D_2})$ ein Automorphismus in bezug auf k, wobei $Y = x - y\sqrt{D_1}$; wegen $\sqrt{X}\sqrt{Y} = z\sqrt{D_2}$ ergibt sich, daß $S^2\sqrt{X} = S\sqrt{Y} = -\sqrt{X}$, woraus $S^2 \neq 1$ und $S^4 = 1$ folgt.

Es sei $\mathfrak{d}$ die Relativdiskriminante für $k_2(\sqrt{X})/k_2$. $\mathfrak{p}$ sei ein Primteiler der ungeraden Primzahl p in k_2. Wäre $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{d}$, so wäre $\mathfrak{p} \mid \begin{vmatrix} \sqrt{X} & -\sqrt{X} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2$ [15]), d. h. $\mathfrak{p} \mid 4X$, also $\mathfrak{p} \mid X$. Weil $k_2(\sqrt{X}) = k_2(\sqrt{Y})$ ist, wäre auch $\mathfrak{p} \mid Y$, also $\mathfrak{p} \mid X + Y$, $\mathfrak{p} \mid 2x$, $\mathfrak{p} \mid x$, $\mathfrak{p} \mid y\sqrt{D_1}$. Das geht aber nicht wegen $(x, yD_1) = 1$. Da X keinen Teiler mit 2 gemeinsam hat, so ist also $k_2(\sqrt{X})$ *unverzweigt* über k_2 und daher auch über k, wenn nur

$$X \equiv \alpha^2 \pmod 4 \tag{3}$$

mit $\alpha < k_2$ stattfindet [16]).

Dies ist aber immer erreichbar, indem man das Vorzeichen von x geeignet wählt, wie folgt:

Ist D_1 ungerade, so ist y gerade nach (1), woraus $X \equiv x + y \pmod 4$ folgt. Mit geeignetem x ist also $X \equiv 1 \pmod 4$, und somit ist (3) erfüllt.

Ist $D_1 \equiv 12 \pmod{16}$, so muß $D_2 \equiv 1 \pmod 8$ sein, und somit y gerade nach (1). Dann ist $X \equiv x \pmod 4$. Das weitere ist ähnlich wie im vorigen Falle.

Ist endlich $D_1 \equiv 8 \pmod{16}$, und ist zugleich y gerade, so ist der Fall dem vorigen analog; ist aber y ungerade, so wähle man $x \equiv 3 \pmod 4$. Dann ist $X \equiv 3 + \sqrt{D_1} \pmod 4$, und daher ist (3) mit $\alpha \equiv 1 + \frac{1}{2}\sqrt{D_1} \pmod 2$ erfüllt [17]).

3. Es bedeute $\mathfrak{K}$ die absolute Klassengruppe von k im engeren Sinn, d. h. $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}_1$, wenn $\mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{a}_1$, wobei α eine Zahl positiver Norm in k ist.

Es seien $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_4$ Untergruppen von $\mathfrak{K}$ vom Index 2 bzw. 4 und zyklischer Faktorgruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_4$.

Nach der Theorie der Klassenkörper bestimmen sich $\mathfrak{K}_2$ und k_2 gegenseitig eindeutig. In einer analogen Beziehung stehen $\mathfrak{K}_4$ und k_4 zueinander. Ferner bedingen sich die Relationen $\mathfrak{K}_4 < \mathfrak{K}_2$ und $k_2 < k_4$ gegenseitig [18]). Hiernach ist die Anzahl der verschiedenen $\mathfrak{K}_2$, die ein $\mathfrak{K}_4$ enthalten, gleich der Anzahl der verschiedenen k_2, über denen es ein k_4 gibt. Sind diese Anzahlen n_1 bzw. n_2, so ist also

$$n_1 = n_2. \tag{4}$$

Infolge **1.** und **2.** stimmt n_2 mit der Anzahl der verschiedenen eigentlichen D-Zerfällungen zweiter Art überein, d. h.

$$n_2 = n_3 - 1, \tag{5}$$

wobei n_3 die Anzahl der verschiedenen D-Zerfällungen zweiter Art (inkl. der uneigentlichen) bedeutet.

Die Anzahl n_1 läßt sich folgendermaßen bestimmen:

Es bedeute χ einen beliebigen Gruppencharakter der abelschen Gruppe $\mathfrak{K}$. Es sei χ_2 und χ_4 ein beliebiger Charakter zweiter bzw. vierter Ordnung. Dann gibt es zu jedem

---

[15]) Denn die Körperrelativdiskriminante ist gemeinsamer Teiler aller Relativdiskriminanten ganzer Zahlen.

[16]) D. Hilbert, Über die Theorie des relativ quadratischen Zahlkörpers, Math. Ann. **5** (1898), S. 5—6.

[17]) Es ist leicht zu beweisen, daß $k_2(\sqrt{rX})$ die sämtlichen k_4 zu *einem* k_2 liefert, wenn r ganz rational, $r \equiv 1 \pmod 4$ und $r \mid D$; und zwar ergibt sich dann jedes k_4 viermal bei ungeradem D und zweimal bei geradem D.

[18]) Bericht, Teil I, Satz **10**.

$\mathfrak{K}_4$ ein χ_4 (dasselbe leistet dann auch χ_4^3), sodaß $\mathfrak{K}_4$ die Gesamtheit der Elemente a in $\mathfrak{K}$ mit $\chi_4(a) = 1$ ist [19]). Umgekehrt erklärt diese Gleichung für jedes χ_4 ein $\mathfrak{K}_4$. In einem analogen Zusammenhange stehen $\mathfrak{K}_2$ und χ_2, und zwar bestimmen sich letztere gegenseitig eindeutig. Ist überdies $\mathfrak{K}_4 < \mathfrak{K}_2$, so gilt für die zugeordneten Charaktere: $\chi_4^2 = \chi_2$. Somit stimmen n_1 und die Anzahl der verschiedenen χ_4^2 überein. Da die Gruppe der χ zu $\mathfrak{K}$ isomorph ist, so ist n_1 die Anzahl der verschiedenen a_4^2, wobei a_4 die Elemente vierter Ordnung von $\mathfrak{K}$ bedeutet. Leicht ersichtlich ist also

$$n_1 = 2^{e_4} - 1, \tag{6}$$

wobei e_4 die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten von $\mathfrak{K}$ bedeutet. Infolge der Gleichungen (4) — (6) ist

$$2^{e_4} = n_3. \tag{7}$$

Wir haben damit e_4 bestimmt; wir wollen aber das Resultat noch in einer bequemeren Weise ausdrücken.

Wir nehmen zwei beliebige D-Zerfällungen D_1, D_2 und E_1, E_2. Es ist sofort zu sehen, daß aus den Zahlen D_1E_1, D_2E_1 nach Streichen geeigneter quadratischer Faktoren eine D-Zerfällung (die uneigentliche inbegriffen) entsteht, und daß die drei anderen Kombinationen (D_1E_2, D_2E_2 oder E_1D_1, E_2D_1 oder E_1D_2, E_2D_2) auf dieselbe D-Zerfällung führen; wir nennen sie die aus D_1, D_2 und E_1, E_2 zusammengesetzte D-Zerfällung. Alle D-Zerfällungen bilden somit eine abelsche Gruppe vom Typus (2, 2, . . ., 2) und von der Ordnung $2^{\lambda-1}$, wobei λ die Zahl der verschiedenen Primfaktoren von D ist; Einheitselement ist die uneigentliche D-Zerfällung 1, D, und die Zahl der unabhängigen D-Zerfällungen ist $\lambda - 1$.

Alles läßt sich auch auf die D-Zerfällungen zweiter Art übertragen, mit der Abweichung, daß dann die Ordnung der Gruppe gleich der Zahl n_3 ist, welche in (7) bestimmt wurde, und dementsprechend die Anzahl der unabhängigen D-Zerfällungen zweiter Art gleich e_4 ist. Mit anderen Worten:

Satz. *Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers ist gleich der Anzahl der unabhängigen D-Zerfällungen zweiter Art der Diskriminante des Körpers* [20]).

Nach dem Gaußschen Satz von den Geschlechtern ist e_2 (die Anzahl der geraden Invarianten) gleich $\lambda - 1$, d. h. um 1 kleiner, als die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von D. Da $\lambda - 1$ zugleich die Anzahl der unabhängigen D-Zerfällungen ist, *gestattet somit der Gaußsche Satz eine analoge Formulierung*, nur ist im jetzt erhaltenen Satze „2“ statt „4“ zu setzen und „zweiter Art“ zu streichen.

4. Wir betrachten jetzt nur solche D, die positiv sind und deren ungerade Primfaktoren alle von der Gestalt $4l + 1$ sind — nur bei solchen D kann der Körper k Einheiten negativer Norm enthalten.

---

[19]) Siehe z. B. E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen (1923), S. 38.

[20]) Natürlich ist diese Anzahl gleich Null zu nehmen, wenn es keine eigentliche D-Zerfällung zweiter Art gibt (dann ist nämlich die einzige D-Zerfällung zweiter Art 1, D nicht unabhängig). Entsprechend gibt es dann und nur dann keine durch 4 teilbare Invariante. Es kann als günstigster Fall vorkommen, daß jede durch 2 teilbare Invariante zugleich durch 4 teilbar ist, und zwar trifft dies dann und nur dann zu, wenn für je zwei verschiedene Primfaktoren p, q von D $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ ist (dann kann also D höchstens einen positiven Primzahlfaktor von der Gestalt $4l + 3$ enthalten). — Wir bemerken hier, daß die zu unabhängigen D-Zerfällungen gehörigen k_2 unabhängig (im algebraischen Sinne) über k sind. — Auf den Fall der durch 8 teilbaren Invarianten gedenken wir noch zurückzukommen.

Gibt es in k keine Einheit negativer Norm, so folgt nach Dirichlet das Bestehen einer Gleichung

$$D_1u^2 - D_2v^2 = 4, \tag{8}$$

wobei D_1, D_2 eine eigentliche D-Zerfällung ist und u, v ganz rational sind[21]). Nach (8) ist D_1, D_2 leicht ersichtlich eine D-Zerfällung *zweiter Art*, und somit gilt (natürlich nur für die in Betracht gezogenen D):

Im quadratischen Zahlkörper gibt es Einheiten negativer Norm, immer wenn die Geschlechter des Körpers eine ungerade Zahl von Idealklassen enthalten[22]).

---

[21]) Ist nämlich $\varepsilon = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{D})$ Grundeinheit in k, wobei x und y positiv und ganz rational sind, so ist $x^2 - Dy^2 = 4$, also $(x+2)(x-2) = Dy^2$. Dann sind einige Fälle zu unterscheiden, je nachdem x oder D gerade oder ungerade sind, aber immer folgt daraus $x + 2 = D_1u^2$, $x - 2 = D_2v^2$ und damit (8), wobei u und v positiv und ganz rational sind und D_1, D_2 eine D-Zerfällung ist. Dabei ist $\sqrt{\varepsilon} = \pm\frac{1}{2}(u\sqrt{D_1} + v\sqrt{D_2})$, und somit kann nicht $D_1 = 1$ oder $D_2 = 1$ sein, weil sonst ε nicht Grundeinheit wäre.

[22]) Vgl. Fußnote [4]). — Wir erwähnen folgendes: Herr R. Fueter (Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluß auf die Zahlentheorie, Jahresb. D.M.V. **20** (1911), S. 45—46) meinte im Falle $D \equiv 1 \pmod 8$ die notwendige Bedingung gefunden zu haben, *daß es in* $R(\sqrt{-D})$ *eine gerade Anzahl von Klassen in jedem Geschlechte geben muß, damit die Grundeinheit in* $k = R(\sqrt{D})$ *die Norm* -1 *hat.* Der Satz ist zwar richtig, doch *inhaltslos* (wie wir in der dritten der unter [1]) zitierten Arbeiten schon bemerkten). Dies erhellt leicht aus unserem ersten vorliegenden Satze, da die Diskriminante von $R(\sqrt{-D})$ gleich $-4D$ ist und dafür im vorausgesetzten Falle $-4, D$ eine eigentliche D-Zerfällung zweiter Art ist. — Das Versehen hat übrigens nach einer brieflichen Mitteilung auch Herr R. Fueter selbst kurz nach dem Erscheinen jener Arbeit bemerkt. — Andere Bedingungen für das Vorzeichen der Norm der Grundeinheit gedenken wir an einer anderen Stelle zu betrachten.

Eingegangen 2. Juli 1932.

Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper.

Von *Hans Reichardt* in Marburg (Lahn).

Es sei Q ein quadratischer Körper über R, dem Körper der rationalen Zahlen, und D seine Diskriminante. Als absolute Idealklassen von Q mögen immer die Klassen bezeichnet werden, die man erhält bei der Einteilung aller Ideale von Q nach H^*, der Gruppe der Hauptideale, die sich durch total positive Zahlen erzeugen lassen. Nach einem Satz von Gauß besitzt diese Klassengruppe $t-1$ gerade Invarianten, wenn t die Anzahl der in D aufgehenden Primzahlen ist. Rédei hat kürzlich die Zahl der durch 4 [1]) und 8 [2]) teilbaren Invarianten bestimmt, und hier soll nun allgemein die Anzahl der durch 2^n teilbaren Invarianten untersucht werden. Dabei wird der Satz von Rédei über die durch 4 teilbaren Invarianten nochmals bewiesen werden, und zwar in einfacherer Form als damals. Der Grundgedanke ist wieder der, daß alle unverzweigten zyklischen Körper vom Grad 2^n über Q aufgestellt und nach den Sätzen der Klassenkörpertheorie in Beziehung zu der absoluten Idealklassengruppe von Q gebracht werden.

Damit überhaupt gerade Invarianten existieren, muß nach dem Gaußschen Satz $t > 1$ vorausgesetzt werden. Dann gibt es in Q mindestens eine mod. p_∞ erklärbare Idealgruppe H_1, die vom Index 2 in A, der Gruppe aller Ideale von Q, enthalten ist. Der zugehörige Klassenkörper K_1 ist dann quadratisch und unverzweigt über Q und hat daher die Form

$$K_1 = R(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2}),$$

wobei D_i die Diskriminante von $R(\sqrt{D_i})$ und $D = D_1 D_2$ ist. Umgekehrt ist jeder zu einer solchen D-Zerfällung gehörige Körper $K = R(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ unverzweigt und quadratisch über Q (abgesehen natürlich von der trivialen Zerfällung $1, D$) und daher Klassenkörper zu einer Idealgruppe in Q vom Index 2 mit dem Erklärungsmodul p_∞.

Nach dem Existenz- und Umkehrsatz der Klassenkörpertheorie gibt es dann und nur dann eine durch 2^n teilbare Invariante der absoluten Klassengruppe von Q, wenn ein unverzweigter zyklischer Körper K_n vom Grad 2^n über Q existiert. Ist das der Fall, so liegt zwischen K_n und Q genau ein Körper K_1, der unverzweigt und quadratisch über Q ist, und damit ist durch K_n eindeutig eine D-Zerfällung bestimmt.

Definition I: *Eine D-Zerfällung D_1, D_2 heißt von der n. Art, wenn über $K_1 = R(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ ein Körper K_{n-1} existiert, der unverzweigt und zyklisch vom Grad 2^{n-1} über Q ist, und in dem alle Primteiler von D aus Q voll zerfallen.*

---

[1]) Rédei und Reichardt: Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers, dieser Band, S. 69—74.

[2]) Die Arbeit von Rédei darüber erscheint im Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Anzeiger der Ungarischen Akademie 49 (1932).

1. Satz: *Zu jedem Körper K_n, der unverzweigt und zyklisch vom Grad 2^n über Q ist, gehört eine D-Zerfällung n. Art, und zu jeder solchen D-Zerfällung gehört mindestens ein solcher Körper K_n.*

Beweis: 1. Es existiere ein Körper K_n der genannten Art.

K_n ist dann Klassenkörper zu einer Idealgruppe H_n in Q, die mod. p_∞ erklärbar ist, und für die die Faktorgruppe A/H_n zyklisch von der Ordnung 2^n ist. C_n sei eine erzeugende Klasse nach H_n. Geht nun die Primzahl p in D auf, so hat sie die Zerlegung $p = \mathfrak{p}^2$ in Q. Da p in H_n liegt, gehört $\mathfrak{p}$ zur Idealgruppe $\{C^{2^{n-1}}\} = H_{n-1}$. Diese ist wieder mod. p_∞ erklärbar, und die Klassengruppe nach H_{n-1} ist zyklisch von der Ordnung 2^{n-1}. Der zu H_{n-1} gehörige Klassenkörper K_{n-1} ist daher unverzweigt und zyklisch vom Grad 2^{n-1} über Q und in K_n enthalten. Weil $\mathfrak{p}$ in H_{n-1} liegt, zerfällt $\mathfrak{p}$ in K_{n-1} voll. Die zu K_n gehörige D-Zerfällung stimmt nun mit der überein, die zu K_{n-1} gehört, ist also von der n. Art.

2. Die D-Zerfällung D_1, D_2 sei von der n. Art.

Der nach Definition I existierende Körper K_{n-1} ist Klassenkörper zu einer mod. p_∞ erklärbaren Idealgruppe H_{n-1}, für die A/H_{n-1} zyklisch von der Ordnung 2^{n-1} ist. Da jeder Primteiler $\mathfrak{p}$ von D aus Q voll in K_{n-1} zerfällt, enthält H_{n-1} alle Primteiler von D aus Q. Nun repräsentieren diese Primideale ein Basissystem der absoluten Idealklassen, deren Quadrat die absolute Hauptklasse H^* ist. Die beiden Faktorgruppen A/H^* und H_{n-1}/H^* haben daher beide denselben Rang bezüglich 2, d. h. besitzen gleich viel gerade Invarianten, und zwar ist dieser Rang nach dem Satz von Gauß $t-1$. Weil A/H_{n-1} zyklisch von der Ordnung 2^{n-1} ist, existiert eine unabhängige 2-Basis $C_1^*, \ldots, C_{t-1}^*$ (d. h. A/H^* ist direktes Produkt von $\{C_1^*\}, \ldots, \{C_{t-1}^*\}$ und einer Idealgruppe $\bar{H}$, die H^* von ungeradem Index enthält, wobei die Ordnungen der C_τ^* Potenzen von 2 sind), sodaß

$$H_{n-1} = \{C_1^{*2^{n-1}}, C_2^*, \ldots, C_{t-1}^*\} \times \bar{H}.$$

Dabei ist $C_1^{*2^{n-1}} \neq H^*$, denn sonst wäre H_{n-1}/H^* nicht mehr vom Rang $t-1$ bezüglich 2. Setze ich nun

$$H_n = \{C_1^{*2^n}, C_2^*, \ldots, C_{t-1}^*\} \times \bar{H},$$

so ist A/H_n zyklisch von der Ordnung 2^n. Weiter ist H_n mod. p_∞ erklärbar und in H_{n-1} enthalten. Der zu H_n gehörige Klassenkörper K_n ist daher unverzweigt und zyklisch vom Grad 2^n über Q und gehört zu der gegebenen D-Zerfällung, da er den Körper K_{n-1} enthält.

Die D-Zerfällungen einschließlich der trivialen $1, D$ bilden eine abelsche Gruppe [3]) der Ordnung 2^{t-1} vom Typus $(2, \ldots, 2)$, wenn man als Produkt der D-Zerfällungen D_1, D_2 und D_1', D_2' die D-Zerfällung nimmt, die aus $D_1 D_1', D_2 D_1'$ durch Abspaltung von geeigneten quadratischen Faktoren entsteht. Es läßt sich nun zeigen, *daß die D-Zerfällungen n. Art eine Untergruppe davon bilden*:

Es seien D_1, D_2 und D_1', D_2' verschiedene D-Zerfällungen *n. Art* und D_1'', D_2'' ihr Produkt, und zwar sei keine der beiden gegebenen D-Zerfällungen die triviale. Dann ist das Kompositum der beiden Körper $K_1 = R(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ und $K_1' = R(\sqrt{D_1'}, \sqrt{D_2'})$ abelsch vom Typus (2, 2) über Q. Zwischen $K_1 K_1'$ und Q liegt dann also noch genau ein Körper, und zwar ist das offenbar gerade $K_1'' = R(\sqrt{D_1''}, \sqrt{D_2''})$. Es seien nun K_{n-1} und K_{n-1}' die nach Definition I existierenden, zu D_1, D_2 und D_1', D_2' gehörenden Körper.

---

[3]) Dieser Band, S. 73.

Sie sind unabhängig über Q, d. h. ihr Kompositum ist vom Grad $2^{n-1} \cdot 2^{n-1}$ über Q, weil Q bereits der Durchschnitt von K_1 und K_1' ist. Das Kompositum $K_{n-1}K_{n-1}'$ ist daher abelsch vom Typus $(2^{n-1}, 2^{n-1})$ über Q. Die galoissche Gruppe für $K_{n-1}K_{n-1}'/Q$ sei

$$\{U\} \times \{U'\} \quad \text{mit} \quad U^{2^{n-1}} = U'^{2^{n-1}} = 1,$$

und U bzw. U' möge K_{n-1} bzw. K_{n-1}' elementweise ungeändert lassen. Dann gehört im Sinn der galoisschen Theorie K_1 zu $\{U, U'^2\}$ und K_1' zu $\{U', U^2\}$. $\{U, U'\}$ enthält nur noch eine dritte Untergruppe vom Index 2, nämlich $\{UU', U^2\}$, weil $\{U, U'\}$ vom Rang 2 bezüglich 2 ist. $\{UU', U^2\}$ gehört also dann zu K_1''. Nun ist die Faktorgruppe $\{U, U'\}/\{UU'\}$ zyklisch von der Ordnung 2^{n-1}, und $\{UU', U^2\}$ enthält $\{UU'\}$. Der zu $\{UU'\}$ gehörende Teilkörper K_{n-1}'' von $K_{n-1}K_{n-1}'$ ist daher zyklisch vom Grad 2^{n-1} über Q und enthält K_1''. Weiter ist K_{n-1}'' unverzweigt über Q, und die Primteiler von D aus Q zerfallen voll in K_{n-1}'', weil beides in K_{n-1} und K_{n-1}', also auch in jedem Körper zwischen $K_{n-1}K_{n-1}'$ und Q der Fall ist. Das heißt aber, die D-Zerfällung D_1'', D_2'' ist von der n. Art.

2. Satz: *Die Zahl der durch 2^n teilbaren Invarianten der absoluten Idealklassengruppe von $Q = R(\sqrt{D})$ ist gleich der Zahl der unabhängigen D-Zerfällungen n. Art* [4]).

Beweis: Ist r die Anzahl der unabhängigen D-Zerfällungen n. Art, so gibt es im ganzen $2^r - 1$ nicht-triviale D-Zerfällungen n. Art und damit nach dem 1. Satz $2^r - 1$ verschiedene über Q quadratische und unverzweigte Körper, über denen mindestens ein Körper existiert, der unverzweigt und zyklisch vom Grad 2^n über Q ist. Nach den Sätzen der Klassenkörpertheorie ist dann $2^r - 1$ auch die Zahl der Untergruppen von A — der Gruppe aller Ideale von Q — vom Index 2, die mindestens eine mod. p_∞ erklärbare Idealgruppe H_n enthalten, so daß A/H_n zyklisch von der Ordnung 2^n ist. Nun entsprechen die Charaktere der Ordnung 2 der absoluten Klassengruppe und die Untergruppen von A/H^* vom Index 2 einander eindeutig. Daher gibt es genau $2^r - 1$ Charaktere der Ordnung 2, die sich als 2^{n-1}-te Potenzen irgendeines Charakters von A/H^* auffassen lassen, und da die Gruppe der Charaktere zu A/H^* selbst isomorph ist, ist $2^r - 1$ die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 von A/H^*, die selbst noch 2^{n-1}-te Potenzen sind. Es seien nun $2^{c_1}, \ldots, 2^{c_t - 1}$ die in den Invarianten von A/H^* steckenden Potenzen von 2 und $C_1^*, \ldots, C_{t-1}^*$ mit den entsprechenden Ordnungen ein unabhängiges 2-Basissystem. Alle Elemente der Ordnung 2 haben dann die Form

$$A = \prod_{\tau=1}^{t-1} C_\tau^{2^{c_\tau - 1} x_\tau} \quad \text{mit} \quad x_\tau = 0 \text{ oder } 1,$$

wobei die x_τ nicht alle gleichzeitig 0 sind. Soll nun ein solches Element noch eine 2^{n-1}. Potenz sein, so muß $2^{c_\tau - 1} \cdot x$ durch 2^{n-1} teilbar sein, also $x_\tau = 0$, wenn $c_\tau < n$, und sonst $x_\tau = 0$ oder 1. Ist daher r' die Zahl der $c_\tau \geqq n$, also die Zahl der durch 2^n teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe von Q, so gibt es $2^{r'} - 1$ solche Elemente. Andererseits war diese Zahl schon zu $2^r - 1$ bestimmt, also gilt $r = r'$.

Für $n = 2$ ist das bereits das Ergebnis von Rédei, nur waren dort die D-Zerfällungen 2. Art so definiert: Eine D-Zerfällung D_1, D_2 heißt von der 2. Art, wenn aus $p \mid \frac{D}{D_i}$ folgt $\left(\frac{D_i}{p}\right) = 1$ für $i = 1$ und 2 (p Primzahl, $\left(\frac{D_i}{p}\right)$ Kroneckersches Symbol). Nach dem Zer-

[4]) Damit ist die von Rédei a. a. O. [1]), S. 69 ausgesprochene Vermutung bestätigt.

legungsgesetz in $K_1 = R(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ stimmt diese Definition aber mit der hier für $n = 2$ gegebenen offenbar überein. *Ich will nun die Definition* I, *in der die Existenz gewisser Körper mit gewissen Eigenschaften gefordert wurde, durch eine andere ersetzen, in der es darauf ankommt, ob gewisse Zahlen, die schrittweise zu konstruieren sind, quadratische Reste nach gewissen Moduln sind oder nicht.* Dazu brauche ich noch einige Vorbereitungen.

Der Körper K_n sei unverzweigt und zyklisch vom Grad 2^n über Q, und D_1, D_2 sei die zugehörige D-Zerfällung, die dann von der n. Art ist. K_{n-1} sei der Unterkörper von K_n, der vom Grad 2^{n-1} über Q ist. *Ich will dann alle übrigen unverzweigten und zyklischen Körper vom Grad 2^n über Q bestimmen, die denselben Unterkörper K_{n-1} besitzen.* Es sei also

$$K_n = K_{n-1}(\sqrt{\varkappa_{n-1}}) \text{ mit } \varkappa_{n-1} \text{ aus } K_{n-1}$$

und K_n' ein anderer unverzweigter zyklischer Körper vom Grad 2^n über Q, der K_{n-1} enthält. Dann ist das Kompositum K_nK_n' abelsch vom Typus $(2, 2)$ über K_{n-1}, so daß also zwischen K_{n-1} und K_nK_n' noch ein dritter Körper B liegt, der dann quadratisch über K_{n-1} ist. Weiter ist die galoissche Gruppe $\mathfrak{H}$ von K_nK_n'/Q abelsch vom Typus $(2, 2^n)$; denn sie enthält zunächst eine Untergruppe $\{W\}$ der Ordnung 2, so daß $\mathfrak{H}/\{W\}$ zyklisch von der Ordnung 2^n ist. Daher gibt es ein Element V, so daß V^{2^n} die niedrigste Potenz von V ist, die in $\{W\}$ liegt. Diese Potenz kann nicht gleich W sein, denn sonst wäre ja $\mathfrak{H}$ zyklisch. Es ist also $V^{2^n} = 1$ und damit $\mathfrak{H} = \{W\} \times \{V\}$. Daher liegen zwischen Q und K_nK_n' nur drei Körper vom Grad 2^n über Q, nämlich K_n, K_n' und B. Außerdem enthält K_nK_n' genau drei Teilkörper, die quadratisch über Q sind. K_1 ist einer davon und liegt in K_n und K_n'. Da diese beiden Körper zyklisch über Q sind, können sie nicht noch einen der beiden anderen über Q quadratischen Körper enthalten. Diese sind offenbar auch unverzweigt über Q, haben also die Form $\bar{K}_1 = Q(\sqrt{\bar{D}})$, wobei $\bar{D}$ Teiler von D und Diskriminante von $R(\sqrt{\bar{D}})$ ist. $\bar{K}_1$ liegt dann nicht in K_{n-1}, sodaß also

$$B = K_{n-1}\bar{K}_1 = K_{n-1}(\sqrt{\bar{D}}).$$

Wegen $K_n = K_{n-1}(\sqrt{\varkappa_{n-1}})$ muß dann

$$K_n' = K_{n-1}(\sqrt{\bar{D} \cdot \varkappa_{n-1}})$$

sein. Umgekehrt ist auch jeder solche Körper $K_{n-1}(\sqrt{\bar{D} \cdot \varkappa_{n-1}})$ unverzweigt und zyklisch vom Grad 2^n über Q, wenn $\sqrt{\bar{D}}$ nicht in K_1 liegt. Denn die galoissche Gruppe von $K_n\bar{K}_1/Q$ ist dann abelsch vom Typus $(2, 2^n)$, und $K_n\bar{K}_1$ enthält somit genau drei Körper vom Grad 2^n über Q, nämlich K_n, K_n' und $K_{n-1}(\sqrt{\bar{D}})$. Der letzte ist aber nicht zyklisch über Q, also muß K_n' zyklisch über Q sein. Außerdem ist K_n' natürlich unverzweigt über Q, weil dies für K_n und $\bar{K}_1$, also auch für jeden Körper zwischen Q und K_nK_1' der Fall ist[4a]).

Ich will nun zeigen, daß *jeder Körper K_n, der unverzweigt und zyklisch vom Grad 2^n über Q ist, ein absolut galoisscher Körper mit der Diedergruppe der Ordnung 2^{n+1} als galoisscher Gruppe ist.* K_n ist Klassenkörper zu einer Idealgruppe H_n in Q, die mod. p_∞ erklärbar ist. Gehört nun ein Ideal $\mathfrak{a}$ zu H_n, so liegt auch $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ ($\mathfrak{a}'$ das konjugierte zu $\mathfrak{a}$) als

[4a]) Zusatz bei der Korrektur. Nach dem Vorschlag von Rédei kann man einfacher so schließen: Die Anzahl der verschiedenen Körper K_n über dem festen Körper K_{n-1} ist gleich der Anzahl der H_n, die in einem festen H_{n-1} enthalten sind (wieder H_ν mod. p_∞ erklärbare Idealgruppe, A/H_ν zyklisch von der Ordnung 2^ν), und diese Zahl ergibt sich, ähnlich wie im Beweis des 2. Satzes, zu 2^t-2. Andrerseits läßt sich aber auch die Anzahl der verschiedenen Körper $K_{n-1}(\sqrt{D \cdot \varkappa_{n-1}})$, die ja unverzweigt und zyklisch vom Grad 2^n über Q sind, leicht als 2^{t-2} nachweisen.

rationales Ideal in H_n und damit auch $\mathfrak{a}'$ selbst. Daher ist $H_n = H_n'$, also K_n ein absolut galoisscher Körper. Weil K_n zyklisch über Q vom Grad 2^n ist, enthält die galoissche Gruppe von K_n/R ein Element S der Ordnung 2^n, das ich als Artin-Symbol schreiben kann:

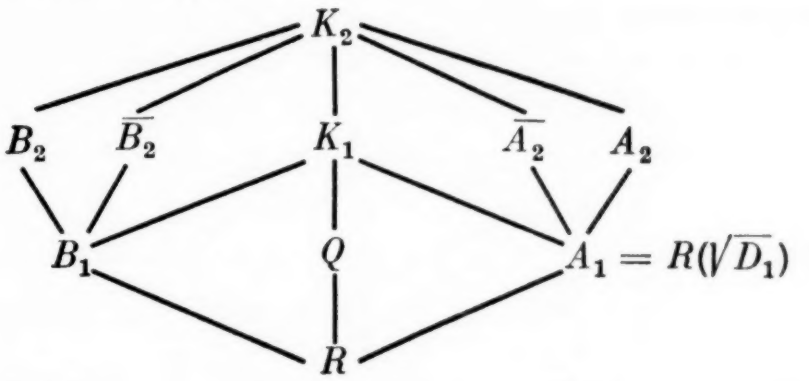
$$S = \left(\frac{K_n/Q}{\mathfrak{a}}\right),$$

wobei $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus einer erzeugenden Klasse nach H_n ist. $\{S\}$ ist dann die galoissche Gruppe für K_n/Q. Es sei nun $\mathfrak{P}_n$ ein Primteiler von D in K_n. Dann ist die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}_n$ für K_n/Q von der Ordnung 1, weil K_n unverzweigt über Q ist. Dagegen ist die Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$ von $\mathfrak{P}_n$ für K_n/R von der Ordnung 2, weil die durch $\mathfrak{P}_n$ teilbare rationale Primzahl p in Q verzweigt ist. Es sei $\mathfrak{G}_T = \{T\}$ mit $T^2 = 1$. Dann ist also der Durchschnitt von $\{S\}$ und $\{T\}$ von der Ordnung 1, und damit ist $\{S, T\}$ die galoissche Gruppe von K_n/R. T bewirkt, auf Q angewandt, den nicht-identischen Automorphismus von Q. Es ist daher

$$T^{-1}ST = T^{-1}\left(\frac{K_n/Q}{\mathfrak{a}}\right)T = \left(\frac{K_n^T/Q^T}{\mathfrak{a}^T}\right) = \left(\frac{K_n/Q}{\mathfrak{a}'}\right) = \left(\frac{K_n/Q}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}\right)\left(\frac{K_n/Q}{\mathfrak{a}}\right)^{-1}$$
$$= S^{-1},$$

weil $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ ein rationales Ideal ist und daher in H_n liegt. Die galoissche Gruppe von K_n/R ist also in der Tat die Diedergruppe $\{S, T\}$ der Ordnung 2^{n+1}.

Ich komme nun zu der angekündigten neuen Definition der D-Zerfällungen n. Art für $n > 2$. Zunächst betrachte ich nochmals eine D-Zerfällung von der 2. Art. $K_1 = R(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ besitzt dann einen Oberkörper K_2, der unverzweigt und zyklisch vom Grad 4 über Q ist. K_2 enthält folgende Unterkörper, wie sich aus der Struktur der Diedergruppe der Ordnung 8 leicht ergibt:



Ist $A_2 = A_1(\sqrt{\alpha_1})$ mit $\alpha_1 = x + y\sqrt{D_1}$ (x, y aus R),
so ist $\overline{A_2} = A_1(\sqrt{\alpha_1'})$ mit $\alpha_1' = x - y\sqrt{D_1}$,
$K_1 = A_1(\sqrt{\alpha_1\alpha_1'})$,
$K_2 = A_1(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_1'})$.

Andrerseits ist auch $K_1 = A_1(\sqrt{D_2})$, also ist $\alpha_1\alpha_1' = D_2\vartheta_1^2$ mit ϑ_1 aus A_1. Dabei liegt ϑ_1^2 in R, also hat ϑ_1 die Form z oder $z\sqrt{D_1}$ mit z aus R, und zwar ist $\vartheta_1 = z$, weil sonst K_2 nicht zyklisch über Q wäre, wie man leicht nachrechnet. Ist umgekehrt α_1 eine Zahl aus A_1, so daß $\alpha_1\alpha_1' = D_2z^2$ mit z aus R, so kann man ebenso leicht nachrechnen, daß dann K_2 wirklich zyklisch über Q ist.

Mit $D_{M/N}$ möge allgemein die Diskriminante des Körpers M in bezug auf den Unterkörper N von M bezeichnet werden. Dann ist bekanntlich

$$D_{K_2/A_1} = D_{K_1/A_1}^2 \cdot N_{K_1/A_1}(D_{K_2/K_1})$$
$$= D_{K_1/A_1}^2.$$

Andrerseits ist nach der Führer-Diskriminantenformel der Klassenkörpertheorie für K_2/A_1

$$D_{K_2/A_1} = D_{K_1/A_1} \cdot D_{A_2/A_1} \cdot D_{\bar{A}_2/A_1},$$

also

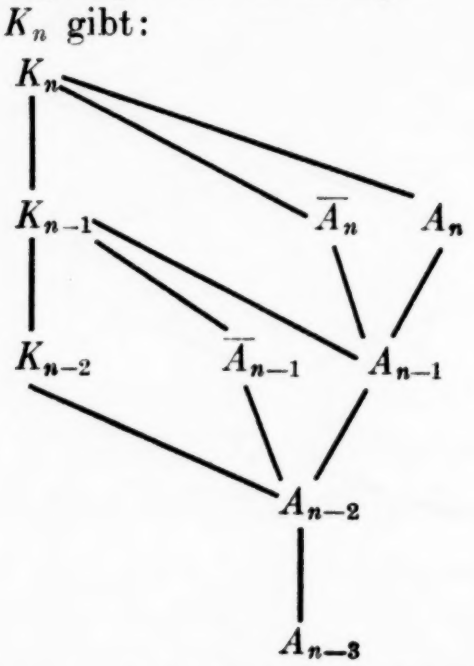
$$D_{K_1/A_1} = D_{A_2/A_1} \cdot D_{\bar{A}_2/A_1}.$$

Die beiden Diskriminanten D_{A_2/A_1} und $D_{\bar{A}_2/A_1}$ sind zueinander konjugiert, und außerdem sind sie teilerfremd. Sonst würde es nämlich ein Primideal $\mathfrak{p}_1$ in A_1 geben, das in A_2, $\bar{A}_2$ und K_1 verzweigt wäre. Das geht aber nicht, weil wegen der Unverzweigtheit von K_2/K_1 die Trägheitsgruppe für K_2/A_1, die zu den Primteilern von $\mathfrak{p}_1$ aus K_2 gehört, höchstens von der Ordnung 2 ist. Nun ist $D_{K_1/A_1} = D_2$, wie sich sofort bei Betrachtung der Differenten für K_1/R, K_1/A_1 und A_1/R ergibt. Ist also jetzt p eine in D_2 aufgehende Primzahl, so zerfällt sie in A_1 voll, weil D_1, D_2 von der 2. Art ist, und von den beiden Primteilern aus A_1 von p ist der eine in A_2 verzweigt, der andere nicht, d. h. α_1 ist für den einen Primteiler nicht primär, für den anderen aber primär [5]). Für alle anderen Primideale von A_1 ist α_1 primär. Ist umgekehrt α_1 nur für die angegebene Primideale nicht primär, so ist offenbar K_2 unzverzweigt über Q.

Gibt es nun unter allen diesen zu D_1, D_2 gehörigen Körpern K_2 einen solchen, in dem alle Primteiler von D aus Q voll zerfallen, so ist nach Definition I D_1, D_2 von der 3. Art, und umgekehrt. Das ist aber offenbar nach der ersten Vorbereitung auf Seite 78 gleichbedeutend damit, daß es unter allen Zahlen $\alpha_1 \bar{D}$ mindestens eine gibt, die für alle die Primteiler, für die $\alpha_1 \bar{D}$ primär ist, sogar hyperprimär ist.

Ganz analog kann ich nun auch für die größeren Werte von n schließen.

Es sei D_1, D_2 eine D-Zerfällung der n. Art ($n \geqq 3$), und alle Körper K_{n-1} aus der Definition I seien bereits bekannt. Über jedem solchen Körper existiert dann mindestens ein Körper K_n, der unverzweigt und zyklisch vom Grad 2^n über Q ist. Aus der bekannten Struktur der Diedergruppe der Ordnung 2^{n+1} folgt, daß es eine derartige Serie von Unterkörpern von K_n gibt:



Dabei ist A_μ vom Grad 2^μ, und A_μ und $\bar{A}_\mu$ sind bezüglich $A_{\mu-2}$ konjugiert. Es sei weiter

$$A_\mu = A_{\mu-1}(\sqrt{\alpha_{\mu-1}}) \quad \text{mit} \quad \alpha_{\mu-1} \text{ aus } A_{\mu-1}.$$

Dann ist

$$\alpha_{n-1} = \xi_{n-2} + v_{n-2}\sqrt{\alpha_{n-2}} \quad \text{mit} \quad \xi_{n-2}, v_{n-2} \text{ aus } A_{n-2}.$$

Setze ich $\alpha'_{n-1} = \xi_{n-2} - v_{n-2}\sqrt{\alpha_{n-2}}$,

so ist $\bar{A}_n = A_{n-1}(\sqrt{\alpha'_{n-1}})$,

$K_{n-1} = A_{n-1}(\sqrt{\alpha_{n-1}\,\alpha'_{n-1}})$.

---

[5]) Ist K irgendein Zahlkörper von endlichem Grad und $K(\sqrt{\alpha})$ eine quadratische Erweiterung davon, so heißt α primär für ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus K, wenn $\mathfrak{p}$ in $K(\sqrt{\alpha})$ unverzweigt ist, und hyperprimär, wenn $\mathfrak{p}$ in $K(\sqrt{\alpha})$ voll zerfällt.

Andrerseits ist $K_{n-1} = A_{n-1}(\sqrt{\alpha'_{n-2}})$, wenn α'_{n-2} konjugiert zu α_{n-2} bezüglich A_{n-3} ist. Also gilt

$$\alpha_{n-1}\,\alpha'_{n-1} = \alpha'_{n-2}\,\vartheta_{n-1}^2 \qquad \text{mit } \vartheta_{n-1} \text{ aus } A_{n-1}.$$

Dabei liegt wieder ϑ_{n-1}^2 in A_{n-2}, hat also die Form ζ_{n-2} oder $\zeta_{n-2}\sqrt{\alpha_{n-2}}$ mit ζ_{n-2} aus A_{n-2}. Man rechnet wieder leicht nach, daß dann und nur dann K_n zyklisch über K_{n-2} ist, wenn $\vartheta_{n-1} = \zeta_{n-2}$. Das genügt dann auch schon dafür, daß K_n zyklisch über Q ist. Denn aus $\alpha_{n-1}\,\alpha'_{n-1} = \alpha'_{n-2}\,\zeta_{n-2}^2$ folgt zunächst, daß $K_n = K_{n-1}(\sqrt{\alpha_{n-1}})$ wirklich normal über Q ist. Die galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von K_n/Q besitzt dann ein Element G der Ordnung 2, sodaß die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\{G\}$ zyklisch von der Ordnung 2^{n-1} ist. Es gibt also ein Element H, so daß $\mathfrak{G} = \sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \{G\}\,H^\nu$, und zwar ist $GH = HG$, weil $\{G\}$ invariant in $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Wäre nun $H^{2^{n-1}} = 1$, so wäre $\mathfrak{G} = \{G\} \times \{H\}$. Nun ist im Sinne der galoisschen Theorie $\{G\}$ dem Körper K_{n-1} zugeordnet. Die zu K_{n-2} gehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ müßte dann also $\{G\}$ enthalten und könnte daher nicht zyklisch sein. Also ist $H^{2^{n-1}} = G$, d. h. $\mathfrak{G} = \{H\}$ ist zyklisch.

Weiter ist ganz wie oben

$$D_{A_n/A_{n-1}} \cdot D_{\bar{A}_n/A_{n-1}} = D_{K_{n-1}/A_{n-1}} = D_{\bar{A}_{n-1}/A_{n-2}},$$

und $D_{A_n/A_{n-1}}$ ist prim zu seinem konjugierten $D_{\bar{A}_n/A_{n-1}}$. Daher ist wieder je ein Primteiler von $D_{\bar{A}_{n-1}/A_{n-2}}$ aus A_{n-1} in A_n verzweigt, der andere nicht, d. h. α_{n-1} ist für je einen Primteiler von $D_{\bar{A}_{n-1}/A_{n-2}}$ aus A_{n-1} nicht primär und für alle anderen Primideale aus A_{n-1} primär. Ist dies umgekehrt der Fall, so ist offenbar K_n unverzweigt über K_{n-1} und damit auch über Q. Nun ist diese D-Zerfällung dann und nur dann von der $(n+1)$. Art, wenn es unter allen diesen Körpern K_n, die zu dieser D-Zerfällung gehören, einen gibt, in dem die Primteiler von D aus Q voll zerfallen. Das ist aber offenbar gleichbedeutend damit, daß es unter all den Zahlen α_{n-1} eine gibt, die für alle Primteiler von D aus A_{n-1}, für die α_{n-1} primär ist, sogar hyperprimär ist, weil ja alle Primteiler von D aus A_{n-1} vom Grad 1 über R sind.

Ist jetzt K ein beliebiger Körper und $K(\sqrt{\alpha})$ mit α aus K quadratisch darüber, so lautet das Zerlegungsgesetz der Primideale $\mathfrak{p}$ aus K in $K(\sqrt{\alpha})$ so:

1. $\mathfrak{p} \nmid 2$.

Ist die Ordnung von α bezüglich $\mathfrak{p}$ ungerade, was mit $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 0$ angedeutet werden soll, so ist α nicht primär für $\mathfrak{p}$. Ist die Ordnung von α bezüglich $\mathfrak{p}$ gerade und ist $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ das quadratische Restsymbol in K (im multiplikativen Sinn!), so ist α hyperprimär für $\mathfrak{p}$, wenn $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, und sonst nur primär, nicht hyperprimär.

2. $\mathfrak{p} \mid 2$. a sei die Ordnung von 2 bezüglich $\mathfrak{p}$.

Ist die Ordnung von α bezüglich $\mathfrak{p}$ ungerade, so ist α nicht primär für $\mathfrak{p}$, ebenso, wenn diese Ordnung zwar gerade ist, aber $\alpha \underset{(2)}{\not\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{p}^{2a}}$ d. h. quadratischer Nichtrest im multiplikativen Sinn ist. Ist $\alpha \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{p}^{2a+1}}$, so ist α hyperprimär für $\mathfrak{p}$, und sonst ist α nur primär, nicht hyperprimär. Ich setze auch hier $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 0$ oder -1 oder $+1$, je nachdem α nicht primär, oder primär aber nicht hyperprimär, oder hyperprimär für $\mathfrak{p}$ ist.

Dann lassen sich die Ergebnisse über die D-Zerfällungen n. Art so formulieren:

3. Satz: 1. *Ist D_1, D_2 eine D-Zerfällung 2. Art, so hat*

$$x^2 - D_1 y^2 - D_2 z^2 = 0$$

eine solche Lösung in rationalen x, y, z, daß, wenn $\alpha_1 = x + y\sqrt{D_1}$ gesetzt wird, für je einen von zwei konjugierten Primteilern von D_2 aus $A_1 = R(\sqrt{D_1})$ $\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right) = 0$ und für alle anderen Primideale von A_1 $\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$ ist. Die Gesamtheit der zu D_1, D_2 gehörigen unverzweigten zyklischen Körper vom Grad 2^2 über Q stimmt dann mit der Gesamtheit der Körper $K_1(\sqrt{\alpha_1 \bar{D}})$ überein, wobei $K_1 = R(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ und $\bar{D}$ alle Diskriminanten, die in D aufgehen, durchläuft.

2. *Ist D_1, D_2 eine D-Zerfällung n. Art ($n = 3, 4, 5, \ldots$), so hat*

$$\xi_{n-2}^2 - \alpha_{n-2} v_{n-2}^2 - \alpha'_{n-2} \zeta_{n-2}^2 = 0$$

eine solche Lösung mit $\xi_{n-2}, v_{n-2}, \zeta_{n-2}$ aus A_{n-2}, daß, wenn $\alpha_{n-1} = \xi_{n-2} + v_{n-2}\sqrt{\alpha_{n-2}}$ gesetzt wird, für je einen von zwei über A_{n-2} konjugierten Primteilern von $D_{\bar{A}_{n-1}/A_{n-2}}$ aus $A_{n-1} = A_{n-2}(\sqrt{\alpha_{n-2}})$ $\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\mathfrak{p}_{n-1}}\right) = 0$ und für alle anderen Primideale von A_{n-1} $\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\mathfrak{p}_{n-1}}\right) \neq 0$ ist. Die Gesamtheit der zu D_1, D_2 gehörigen unverzweigten und zyklischen Körper K_n vom Grad 2^n über Q stimmt dann mit der Gesamtheit aller Körper $K_{n-1}(\sqrt{\alpha_{n-1}\bar{D}})$ überein, wobei $\bar{D}$ alle in D aufgehenden Diskriminanten durchläuft und für K_{n-1} alle zu D_1, D_2 gehörigen unverzweigten und zyklischen Körper vom Grad 2^{n-1} über Q zu setzen sind, in denen die Primteiler von D aus Q voll zerfallen.

(α_{n-1} hängt natürlich von K_{n-1} ab.)

Nach diesem langen Satz lassen sich die D-Zerfällungen n. Art in folgender Weise neu charakterisieren:

Definition II: 1. *Eine D-Zerfällung D_1, D_2 heißt von der 2. Art, wenn für jede in D aufgehende Primzahl p, für die $\left(\frac{D_i}{p}\right) \neq 0$ ist, schon $\left(\frac{D_i}{p}\right) = 1$ folgt ($i = 1, 2$).*

2. *Eine D-Zerfällung D_1, D_2 der n. Art ($n > 1$) heißt von der $(n+1)$. Art, wenn es unter all' den Zahlen $\alpha_{n-1}\bar{D}$ aus dem 3. Satz mindestens eine solche gibt, daß für jedes in D aufgehende Primideal $\mathfrak{p}_{n-1}$ aus A_{n-1}, für das $\left(\frac{\alpha_{n-1}\bar{D}}{\mathfrak{p}_{n-1}}\right) \neq 0$ ist, schon $\left(\frac{\alpha_{n-1}\bar{D}}{\mathfrak{p}_{n-1}}\right) = 1$ gilt.*

Eingegangen 1. Dezember 1932.

Über Nullstellen stetiger Funktionen zweier Variabeln.

Von *Alexander Ostrowski* in Basel.

Die Untersuchungen der vorliegenden Abhandlung knüpfen an den Beweis des folgenden Satzes an:

Satz I. *Es sei $F(z)$ $(z = x + iy)$ eine im Innern und auf der Peripherie des Kreises (R), $|z| \leqq R$, reelle stetige Funktion, die auf der Kreislinie $|z| = R$ genau $2n$ Vorzeichenwechsel aufweist in den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, deren Bezeichnung der zyklischen Anordnung dieser Punkte entsprechen möge. Es sei $G(z)$ eine andere für $|z| \leqq R$ reelle stetige Funktion, die in keinem der Punkte a_ν verschwindet, in den Punkten $a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}$ ein bestimmtes Vorzeichen hat, und in den Punkten $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}$ das entgegengesetzte Vorzeichen. Dann besitzen die Funktionen $F(z), G(z)$ für $|z| \leqq R$ wenigstens eine gemeinsame Nullstelle.*

Dabei sagen wir, $F(z)$ besitze in einem Punkte a_ν einen Vorzeichenwechsel, wenn $F(z)$ im Innern keines der beiden anstoßenden Intervalle durchweg verschwindet, und in einem dieser Intervalle durchweg $F(z) \geqq 0$, im anderen durchweg $F(z) \leqq 0$ gilt. — Ein solches Funktionensystem kommt bekanntlich bei dem ersten Gaußschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra vor. Indessen benutzt dieser Beweis im übrigen den linienhaften Charakter der Mannigfaltigkeit $F(z) = 0$ für die in diesem Falle in Betracht kommende Funktion $F(z)$. Bei der Überprüfung dieses Beweises, die ich auf Veranlassung von Herrn L. Schlesinger unternommen habe [1]) und die in erster Linie auf den strengen Beweis für den linienhaften Charakter der Gaußschen Kurve $F = 0$ abzielte, konnte ich nun feststellen, daß Gauß in der zweiten Fassung seines ursprünglichen Beweises (in der sogenannten Jubiläumsschrift, Werke Bd. III pp. 71 ff.) einen, wenn auch kaum durchgeführten Versuch macht, einen prinzipiell wesentlich verschiedenen topologischen Gedanken heranzuziehen. Er betrachtet nämlich die *Gebiete* $F > 0$ bzw. $F < 0$, greift aber sodann dennoch zu Umläufen längs der Berandung, deren Möglichkeit wiederum den linienhaften Charakter der Kurve $F = 0$ voraussetzt. Daß Gauß indessen der hierin liegenden Möglichkeiten sich bewußt war, scheint mir aus der bekannten und viel zitierten Stelle seiner Jubiläumsschrift hervorzugehen: „Im Grunde gehört aber der eigentliche Inhalt der ganzen Argumentation einem höheren, von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstrakten Größenlehre an, dessen Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Größenkombinationen sind, einem Gebiete, welches zur Zeit noch wenig angebaut ist und in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache."

Ich vermute nun, daß Gauß an der zitierten Stelle die Möglichkeit vorgeschwebt hat, mit allgemein definierten *Gebieten* und ihren *Randkontinua* zu operieren, ohne dabei

[1]) Vgl. A. Ostrowski, Über den ersten und vierten Gaußschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, Materialien zu einer wissenschaftlichen Biographie von Gauß, Gauß Werke Bd. X 2, Abh. 3 (1933).

in sämtlichen Details auf elementargeometrische Überlegungen zurückgehen zu müssen. Auf jeden Fall habe ich versucht, mit den Hilfsmitteln der reinen Geometrie der Kontinua den Gaußschen Beweis zu Ende zu führen. Dabei ergab sich das oben formulierte Resultat sowie die weiter unten zu nennenden allgemeineren Tatsachen.

Wir entwickeln im folgenden in den Nummern 1—7 die topologischen Hilfsmittel ab ovo. Obgleich die dabei benutzten Tatsachen im Prinzip bekannt sind, so sind vielleicht manche Einzelheiten nicht ohne Interesse. Und vor allem dürfte der geschichtliche Zusammenhang unserer Methode ihre in sich geschlossene Darstellung rechtfertigen.

Zuerst soll aber der oben formulierte Satz in allgemeineren Zusammenhang eingeordnet und auf eine für den Zweck des Beweises einfachere Formulierung zurückgeführt werden.

Der Satz I ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden Satz, der sich auf die Nullstellen einer *einzelnen* Funktion $F(z)$ bezieht:

Satz II. *Es sei $F(z)$ für $|z| \leqq R$ reell und stetig. Auf der Kreislinie $|z| = R$ möge $F(z)$ in genau $2n$ zyklisch geordneten Punkten $a_1, \ldots, a_{2n}$ sein Vorzeichen wechseln. Dann ordnen sich die $2n$ Punkte a_ν zu Paaren zusammen: (a_α, a_β), wo die beiden Indizes α, β inkongruent mod. 2 sind, derart, daß die beiden Punkte a_α, a_β eines Paares jeweils einem und demselben Kontinuum von Nullstellen der Funktion $F(z)$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $|z| \leqq R$ angehören.*

Denn da unter den Annahmen von Satz I die Funktion $G(z)$ in den beiden Punkten a_α, a_β, die durch ein Nullstellenkontinuum von $F(z)$ verbunden werden, verschiedene Vorzeichen hat, wenn $\alpha \not\equiv \beta \pmod 2$ ist, so muß $G(z)$ in einem Punkte dieses Nullstellenkontinuums von $F(z)$ verschwinden.

Offenbar kann aber die Existenz einer gemeinsamen Nullstelle von $F(z)$ und $G(z)$ auch gefolgert werden, wenn die über $G(z)$ gemachten Voraussetzungen etwas abgeschwächt werden. Wir können nämlich die im Satz I gemachte Voraussetzung über die Vorzeichen von $G(z)$ in den Punkten a_ν durch die folgende ersetzen: Man ordne jedem Punkt a_ν mit *ungeradem* ν als ε_ν die Zahl $+1$ oder -1 zu, je nachdem $G(a_\nu)$ positiv oder negativ ist. Für *gerade* ν soll aber $\varepsilon_\nu = +1$ sein, wenn $G(a_\nu) < 0$, und -1, wenn $G(a_\nu) > 0$ ist. Unter den Voraussetzungen des Satzes I ist offenbar $|\sum_{\nu=1}^{2n} \varepsilon_\nu| = 2n > 0$. Es genügt nun aber vorauszusetzen, daß $\sum_{\nu=1}^{2n} \varepsilon_\nu \neq 0$ ist. Wir haben dann offenbar nur zu zeigen, daß bereits für $\sum_{\nu=1}^{2n} \varepsilon_\nu \neq 0$ für wenigstens eines der Punktepaare a_α, a_β, die nach Satz II miteinander verbindbar sind, die Vorzeichen von $G(a_\alpha)$ und $G(a_\beta)$ verschieden sind. Wäre dies aber nicht der Fall, so müßte $G(z)$ in genau so vielen Punkten a_ν mit geradem ν positiv sein wie in Punkten a_ν mit ungeradem ν. Dann aber wäre $\sum_{\nu=1}^{2n} \varepsilon_\nu = 0$.

Die in der so hergeleiteten Verallgemeinerung des Satzes I vorkommende Summe $\sum_{\nu=1}^{2\mu} \varepsilon_\nu$ hat nun eine wohlbekannte Bedeutung: es ist dies nämlich der Cauchysche Index $R\left(\frac{G}{F}\right)$ von $\frac{G(z)}{F(z)}$ längs der Kreislinie $|z| = R$.

Über diesen Index besagt nun der bekannte Satz von Cauchy, daß sein Wert gleich ist $|M - N|$, wo M die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen von F und G innerhalb der Kontur ist, in denen die Funktionaldeterminante von F und G *positiv* ist, N dagegen die Anzahl solcher gemeinsamer Nullstellen mit *negativem* Wert der Funktionaldeterminante. Vorausgesetzt wird dabei, daß die Funktionaldeterminante von F und G in

keiner gemeinsamen Nullstelle von F und G verschwindet. In der Cauchyschen Abhandlung, in der der Beweis dieses Satzes angegeben wird, wird über die Funktionen F und G ausdrücklich vorausgesetzt, daß sie einmal stetig differenzierbar sind. Es muß allerdings betont werden, daß der Cauchysche Beweis in Wahrheit implizite noch von weiteren geometrischen Voraussetzungen Gebrauch macht, deren analytisches Äquivalent heute anscheinend noch nicht vollständig aufgeklärt ist. Er setzt nämlich nicht nur voraus, daß die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen von F und G endlich ist, sondern darüber hinaus, daß die Kurve $F = 0$ eine einfache Kontur nur in endlich vielen Punkten schneidet [2]), was z. B. sicher der Fall ist, wenn die Punktmenge $F = 0$ in endlich viele reguläre Kurvenbögen zerfällt; dies folgt aber aus der Annahme der einmaligen stetigen Differenzierbarkeit noch nicht. Solange man daher kein einfaches System von allgemeinen Voraussetzungen über F aufgestellt hat, aus denen das Zerfallen der Kurve $F = 0$ in endlich viele reguläre Kurvenbögen folgt, dürfte man bei der Anwendung des Cauchyschen Indexsatzes auf Funktionensysteme auf die Voraussetzung angewiesen sein, daß diese Funktionen *analytisch* sind, da unter dieser Voraussetzung die Diskussion des geometrischen Verlaufs der Kurve $F = 0$ auf einem durchaus analogen Wege möglich ist, wie in der oben (Fußnote [1])) zitierten Mitteilung. Insbesondere ist daher die folgende Formulierung, die sich oben aus dem Satze II ergeben hat, auch im Falle stetig differenzierbarer Funktionen nicht in den Cauchyschen Ergebnissen enthalten:

Satz III. *Es sei $F(z)$ eine im Inneren und auf der Peripherie des Kreises $|z| \leqq R$ reelle und stetige Funktion, die auf der Kreislinie $|z| = R$ genau $2n$ Vorzeichenwechsel aufweist. Es sei $G(z)$ eine andere für $|z| \leqq R$ reelle und stetige Funktion, und es sei der Cauchysche Index von $\frac{G}{F}$ längs der Kreislinie $|z| = R$ von Null verschieden. Dann besitzt das Funktionensystem F, G auf der Kreisfläche $|z| \leqq R$ wenigstens eine gemeinsame Nullstelle.*

Wir haben dabei nicht ausdrücklich verlangt, daß G in allen Punkten von Null verschieden ist, in denen F einen Vorzeichenwechsel aufweist, da ja sonst die Behauptung des Satzes sowieso trivial ist.

Die Cauchyschen Untersuchungen über den Cauchyschen Index sind bekanntlich in der Kroneckerschen Charakteristikentheorie weitgehend verallgemeinert worden. Indessen wird auch in den Kroneckerschen Untersuchungen neben den Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die weitere Voraussetzung zugrunde gelegt, daß die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen von n bei Kronecker vorkommenden Funktionen von n Variabeln jeweils eine endliche ist [3]). Dadurch wird auch in den allgemeineren Kroneckerschen Untersuchungen den von ihm betrachteten Funktionen eine weitere Beschränkung auferlegt, deren analytische Tragweite nicht zu übersehen ist. Insofern ist unser Satz III auch in den allgemeineren Kroneckerschen Resultaten nicht enthalten, sofern man nicht etwa die Funktionen F und G als analytisch voraussetzen will. —

Der Satz II über die Nullstellenmenge einer auf $|z| \leqq R$ stetigen Funktion $F(z)$ ist aber mit dem folgenden rein topologischen Satz über abgeschlossene Mengen äquivalent:

Satz IV. *Es sei M eine auf der Kreisfläche $|z| \leqq R$ liegende abgeschlossene Punktmenge mit der Eigenschaft, daß die Kreislinie $|z| = R$ sich derart in $2n$ Teilbögen zerlegen läßt, daß die zyklisch geordneten Endpunkte $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ dieser Kreisbögen zu M gehören, und daß ferner M alle Teilbögen mit den Endpunkten $a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}$ von allen Teilbögen*

[2]) Journal de l'école polyt. T. 15, XXV-ième cahier, (1835). Vgl. insb. p. 217 ff.

[3]) Kronecker Werke Bd. 1, insb. p. 171 oben.

mit den Endpunkten $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}$ trennt, so daß es keinen auf $|z| \leqq R$ verlaufenden einfachen Streckenzug P gibt, der die Menge M nicht trifft und sowohl einen Punkt eines der Teilbögen mit den Endpunkten $a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}$ als auch einen Punkt eines der Teilbögen mit den Endpunkten $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}$ enthält. Dann ordnen sich die $2n$ Punkte a_ν zu Paaren zusammen: (a_α, a_β), wo $\alpha \not\equiv \beta \pmod 2$ ist, derart, daß die beiden Punkte a_α, a_β eines Paares einem und demselben Teilkontinuum von M angehören.

Um aus Satz IV den Satz II herzuleiten, genügt es, für die abgeschlossene Menge M des Satzes IV die Menge der Nullstellen der Funktion $F(z)$ des Satzes II anzunehmen. Um aber umgekehrt den Satz IV aus dem Satze II herzuleiten, genügt es offenbar, eine solche reelle Funktion $F(z)$ zu konstruieren, die für $|z| \leqq R$ stetig ist, nur auf der Menge M verschwindet und in den nicht zur Menge M gehörenden Punkten der Teilbögen von $|z| = R$ mit geraden bzw. ungeraden Nummern der Endpunkte etwa positive bzw. negative Werte hat. Um eine solche Funktion $F(z)$ zu bilden, braucht man aber nur für $|F(z)|$ den Abstand des Punktes z von der abgeschlossenen Menge M zu nehmen. Das Vorzeichen aber wird in jedem Punkt z, der sich in $|z| \leqq R$ mit einem „geraden" Bogen verbinden läßt, ohne M zu treffen, als positiv und für jedes z, das sich so mit einem „ungeraden" Bogen verbinden läßt, als negativ angenommen. Läßt sich ein z mit keinem Punkt von $|z| = R$ verbinden, ohne M zu treffen, so nehmen wir $F(z)$ etwa > 0 an. —

Es ist nun für das folgende nützlich, hervorzuheben, daß die obigen Sätze auch für ein von einer beliebigen Jordankurve begrenztes Flächenstück gelten, sobald sie für den Fall der Kreisfläche bewiesen sind. Denn man kann ja bekanntlich einen von einer beliebigen Jordankurve berandeten beschränkten abgeschlossenen Bereich stetig und ein eindeutig auf eine beliebige abgeschlossene Kreisscheibe abbilden. Wir können nun diese Bemerkung benutzen, um den Beweis des Satzes II auf den Beweis des einfacheren Falles zurückzuführen, in dem im Inneren jedes der $2n$ Kreisbögen, in die die Kreislinie $|z| = R$ durch die Punkte a_ν eingeteilt ist, die Funktion $F(z)$ *nicht* verschwindet. Zu diesem Zwecke verfahren wir folgendermaßen: Es sei Γ ein beliebiger von den $2n$ Bögen, in die $|z| = R$ durch die Punkte a_ν zerlegt wird. Sind etwa a_i, a_k die beiden Endpunkte von Γ, so kann man diese Punkte durch einen bis auf seine Endpunkte außerhalb von (R) liegenden Kreisbogen (Γ') verbinden, der von den Verlängerungen der nach a_i und a_k führenden Radien außerhalb (R) nicht mehr geschnitten wird. Zu diesem Zwecke braucht man z. B. nur den Mittelpunkt von Γ' innerhalb des Dreiecks $0a_ia_k$ anzunehmen und zwar auf der Winkelhalbierenden des Winkels im Nullpunkt. Man kann nun die Funktion F in die von den Bögen Γ, Γ' gebildete Kreissichel stetig fortsetzen. Zu diesem Zwecke verbinde man den allgemeinen Punkt z dieser Sichel mit dem Nullpunkt, und es sei ζ der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden mit der Kreislinie $|z| = R$. Ist nun F auf Γ durchweg $\geqq 0$, so definiere man $F(z) = F(\zeta) + |z - \zeta|$; ist aber auf Γ durchweg $F \leqq 0$, so soll $F(z) = F(\zeta) - |z - \zeta|$ gesetzt werden. Wiederholen wir denselben Prozeß mit jedem unserer Kreisbögen, so haben wir dadurch eine aus den Kreisbögen zusammengefügte Jordankurve C gefunden, die mit der Kreislinie $|z| = R$ nur die Punkte a_ν gemeinsam hat, und es genügt, unseren Satz für die nach der obigen Vorschrift in das abgeschlossene Innere von C stetig fortgesetzte Funktion zu beweisen, da ja die Werte dieser Funktion außerhalb $|z| = R$ stets von Null verschieden bleiben. Bilden wir nunmehr das von C umschlossene abgeschlossene Flächenstück stetig und eineindeutig auf $|z| \leqq R$ ab — was etwa durch die auf jedem durch den Nullpunkt hindurchgehenden Strahl lineare Sternabbildung geschehen kann, — so haben wir damit eine auf $|z| \leqq R$ stetige Funktion $F^*(z)$ gefunden, die in den Punkten a_ν ihr Vorzeichen wechselt und sonst überall auf $|z| = R$ von Null verschieden ist. Wir können daher beim folgenden

Beweis des Satzes II von vornherein voraussetzen, daß diese Annahme bereits für die Funktion $F(z)$ des Satzes II zutrifft. Ferner werden wir voraussetzen, daß das Vorzeichen von $F(z)$ in den Kreisbögen $(a_{2\nu-1}, a_{2\nu})$ *positiv* ist, da man sonst $F(z)$ nur durch $-F(z)$ zu ersetzen braucht. Wir werden später die Kreisbögen $(a_{2\nu-1}, a_{2\nu})$ als *positive*, die Bögen $(a_{2\nu}, a_{2\nu+1})$, (a_{2n}, a_1) als *negative* Bögen bezeichnen.

---

1. Randdurchsetzung durch Kontinua. Unsere Betrachtungen werden wesentlich auf dem Begriff des *Kontinuums* beruhen. Darunter werden wir eine auf der (durch den unendlich fernen Punkt abgeschlossenen) Riemannschen Kugel liegende abgeschlossene Punktmenge verstehen, die sich nicht in zwei punktfremde abgeschlossene Teilmengen zerlegen läßt. Ferner werden wir unter einem Gebiet eine offene Punktmenge verstehen, die *zusammenhängend* ist, d. h. deren zwei beliebige Punkte durch einen ganz in der Menge verlaufenden einfachen Streckenzug mit endlich vielen Seiten verbunden werden können. Ein Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn für jeden in G liegenden einfachen geschlossenen Streckenzug P mit endlich vielen Seiten entweder das Innere von P oder das Äußere von P ganz zu G gehört. Offenbar besitzt jedes Kontinuum C die folgende Eigenschaft: *Ist G ein Gebiet, und enthält C sowohl einen inneren Punkt von G, als auch einen Punkt, der nicht innerhalb G liegt, so enthält C wenigstens einen Randpunkt von G.* Enthielte in der Tat C keinen Randpunkt von G, so würden die im Innern bzw. im Äußern von G liegenden Punkte von C je eine abgeschlossene Menge A_1, A_2 bilden, und C wäre in zwei punktfremde abgeschlossene Mengen zerlegbar.

Man kann diese Eigenschaft noch etwas verschärfen. Ist G ein Gebiet, C ein Kontinuum, so werden wir von einem Punkt p, der sowohl C als auch dem Rande von G angehört, sagen, daß in diesem Punkt das Kontinuum C den Rand von G *durchsetzt*, wenn es in jeder Umgebung des Punktes p sowohl Punkte von C aus dem Innern von G, als auch Punkte von C aus dem Äußern von G gibt. Dann gilt der

Hilfssatz 1. *Enthält ein Kontinuum C sowohl innere als auch äußere Punkte eines Gebietes G, so gibt es wenigstens einen Randpunkt von G, in dem C den Rand von G durchsetzt.*

Beweis. Es sei die Behauptung des Hilfssatzes falsch. Dann zerfallen alle Punkte von C in vier Klassen. Zur Klasse A gehören die Punkte von C, die außerhalb von G liegen; zur Klasse I die Punkte von C, die innerhalb von G liegen. Zur Klasse A^* zählen wir die Punkte von C, die Randpunkte von G sind, und in deren hinreichend kleiner Umgebung kein Punkt von C liegt, der dem *Innern* von G angehört. In die Klasse I^* fallen endlich die auf dem Rande von G liegenden Punkte von C, in deren hinreichend kleiner Umgebung keine Punkte von C liegen, die zugleich dem *Äußern* von G angehören.

Offenbar kann keine Häufungsstelle der Menge $I + I^*$ der Menge $A + A^*$ angehören und umgekehrt. Daher sind die Mengen $I + I^*$ und $A + A^*$ abgeschlossen. Und da von ihnen nach Voraussetzung keine leer ist, so hätten wir eine Zerlegung des Kontinuums C in zwei punktfremde abgeschlossene Teilmengen $I + I^*$, $A + A^*$. Mit diesem Widerspruch ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Wir brauchen im folgenden einige weitere Hilfssätze aus der Geometrie der Kontinua.

2. Trennung abgeschlossener Nichtkontinua. **Hilfssatz 2.** *Es sei G ein Gebiet, A sei eine in G liegende abgeschlossene Punktmenge. Ist A kein Kontinuum, so gibt es innerhalb G einen A nicht treffenden einfachen geschlossenen Streckenzug P mit endlich vielen Seiten, mit der Eigenschaft, daß sowohl in seinem Innern als auch in seinem Äußern Punkte der Menge A liegen.*

Ist aber A ein beschränktes Kontinuum, so gibt es innerhalb G einen einfachen geschlossenen Streckenzug, der A ganz im Innern enthält.

Beweis. Ist A kein Kontinuum, so sei etwa $A = B + C$ eine Zerlegung der Menge A in zwei punktfremde abgeschlossene Mengen B, C, und $\delta > 0$ sei kleiner als der Abstand der Mengen B und C voneinander und vom Rande von G. Eine der Mengen B, C ist beschränkt, es sei dies etwa B. Ist aber A ein beschränktes Kontinuum, so setzen wir $A = B$ und verstehen unter C die leere Menge. δ sei dann eine positive Zahl, die kleiner ist als der Abstand von A bis zum Rand von G.

Dann kann man die Menge B mit endlich vielen Quadraten mit der Diagonale δ derart überdecken, daß jeder Punkt von B im Innern eines dieser Quadrate liegt und umgekehrt im Innern eines jeden dieser Quadrate ein Punkt von B liegen muß, sodaß alle diese Quadrate ganz in G liegen. Kein Punkt von C kann dann im Innern oder auf dem Rande eines dieser Quadrate liegen. Bilden wir nun die Vereinigungsmenge der innern Punkte unserer Quadrate und nehmen dazu die inneren Punkte derjenigen Seiten unserer Quadrate hinzu, die zweien von ihnen, und ferner diejenigen Ecken, die vier von unsern Quadraten gemeinsam sind, so erhalten wir endlich viele Gebiete $g_1, \ldots, g_k$, sodaß jeder Punkt von B in einem dieser Gebiete liegt, während kein Punkt von C im Innern oder auf dem Rande dieser Gebiete liegen kann. Und zugleich besteht der Rand jedes dieser Gebiete aus einem oder mehreren einfachen Streckenzügen, die sich eventuell zuerst in einzelnen Eckpunkten unserer Quadrate „berühren" können. Durch „Wegschneiden" der betreffenden Ecken können wir dann erreichen, daß die einfachen Streckenzüge, aus denen die Berandung derartiger Gebiete besteht, keine Punkte miteinander gemeinsam haben. Es sei nun g eines unter diesen Gebieten, in dessen Innerm Punkte von B liegen. Ist g einfach zusammenhängend und ist etwa seine Berandung der einfache Streckenzug P, so liegen im Innern von P Punkte von B und außerhalb sämtliche Punkte von C, während P mit der Menge A punktfremd ist, so daß die Behauptung bewiesen ist. Es sei nun g mehrfach zusammenhängend, und der einfache Streckenzug P sei seine äußere „Randkurve". Liegen außerhalb P Punkte der Menge C oder ist die Menge C leer, so hat P wiederum die im Satze verlangte Eigenschaft. Ist dies aber nicht der Fall, so gibt es unter den von P verschiedenen „Randkurven" von g einen einfachen Streckenzug P_1 derart, daß im Innern von P_1 Punkte der Menge C liegen. Da aber dann alle Gebiete $g_\varkappa$ außerhalb P_1 liegen, liegt die gesamte Menge B außerhalb P_1, so daß P_1 die im Hilfssatz verlangte Eigenschaft hat. — Aus dem Beweis ergibt sich zugleich der

Zusatz. *Ist A im Hilfssatz 1 kein Kontinuum, und ist $A = B + C$, wo B, C nicht leere punktfremde abgeschlossene Untermengen von A sind, so kann der Streckenzug P des Hilfssatzes 1 so gewählt werden, daß er wenigstens eine der Mengen B, C nicht trennt.*

3. Reduktion der Schnittpunkte am trennenden Polygon. **Hilfssatz 3.** *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 sei Γ ein innerhalb G gelegener mit A punktfremder offener Kreisbogen, dessen Öffnungswinkel kleiner als 2π ist.* [4]) *Dann kann der Streckenzug P des Hilfssatzes 2 so gewählt werden, daß er über die Behauptungen des Hilfssatzes 2 hinaus mit dem Bogen Γ entweder keinen oder nur einen Punkt gemeinsam hat.*

Beweis. Der Streckenzug P kann den Bogen Γ nur in endlich vielen Punkten erreichen. Die auf Γ liegenden Eckpunkte von P, in denen P den Bogen Γ nicht durchsetzt, können wir durch „Wegschneiden" von Γ entfernen. Dann kann P den Bogen Γ nur in endlich vielen Punkten durchsetzen, in denen jeweils ein außerhalb P liegendes Teilstück von Γ an ein innerhalb P liegendes Teilstück anstößt. Es sei nun (α, β) ein

[4]) Die Endpunkte von Γ werden also nicht zu Γ gerechnet.

im Innern von P liegendes Teilstück von Γ, in dessen Endpunkten α, β P von Γ durchsetzt wird. Dann ist $\langle\alpha, \beta\rangle$ ein Querschnitt des Innern von P und zerlegt dieses Innere in zwei Teilgebiete H_1, H_2, von denen eines, etwa H_1, eine nicht leere Untermenge von A im Innern enthält. Wir ersetzen nun den Streckenzug P durch die ganz in G verlaufende Berandung P_1 von H_1. Dann gehört $\langle\alpha, \beta\rangle$ zu P_1, und zwar liegen die an α und β anstoßenden Teilstrecken von P_1 auf derselben Seite von Γ. Wir können daher (α, β) durch einen Streckenzug ersetzen, der auf der gleichen Seite von Γ liegt, sodann die Ecken α, β wegschneiden, und erhalten damit einen neuen Streckenzug P', der sicher mit Γ weniger Punkte gemeinsam hat als P. Indem wir dieses Verfahren wiederholen, gelangen wir schließlich zu einem einfachen Streckenzug Q, der ganz in G verläuft, die Menge A nicht trifft, in seinem Innern und, wenn A kein Kontinuum ist, auch in seinem Äußern Punkte von A enthält und dessen Inneres von keinem abgeschlossenen Teilstück des Bogens Γ durchsetzt wird.

Durchsetzt nun Q den Bogen Γ in zwei auf Γ aufeinander folgenden Punkten γ, δ, so daß der Teilbogen (γ, δ) *dem Äußern* von Q angehört, so wird das *Außengebiet* von Q durch den Querschnitt $\langle\gamma, \delta\rangle$ in zwei Teilgebiete T_1, T_2 zerlegt, von denen eines, T_1 etwa, Punkte von A enthalten muß, wenn A kein Kontinuum ist. Wir können dann Q durch die Randkurve Q' von T_1 ersetzen. Sonst nehmen wir für Q' die Randkurve des nicht beschränkten unter den beiden Gebieten T_1, T_2. In beiden Fällen haben wir damit eine einfache geschlossene Kurve Q', die A nicht trifft und in ihrem Innern sowie, falls A kein Kontinuum ist, in ihrem Äußern Punkte von A enthält. Q' enthält $\langle\gamma, \delta\rangle$, und die beiden an γ, δ anstoßenden Teilstücke von Q' liegen auf derselben Seite von Γ. Wir können daher wiederum $\langle\gamma, \delta\rangle$ durch einen Streckenzug ersetzen, der auf der gleichen Seite von Γ verläuft. Schneiden wir wieder die in γ und δ liegenden Ecken des so entstehenden Streckenzugs weg, so sind wir damit zu einem Trennungspolygon gelangt, das die gleichen Eigenschaften wie oben P besitzt, zugleich aber den Bogen Γ entweder nur einmal oder gar nicht durchsetzt. W. z. b. w.

4. Zerfallen von Kontinua. **Hilfssatz 4.** *Es sei C ein ganz im Endlichen liegendes Kontinuum, das einen Kreisbogen Γ enthält, derart, daß kein innerer Punkt von Γ Häufungsstelle der Menge $C - \Gamma$ ist — Γ sei also ein in C liegender „freier" Kreisbogen. — Entfernt man aus dem Kontinuum C alle innern Punkte des Kreisbogens Γ, so sind zwei Fälle möglich: Entweder bleibt die übrig bleibende Menge R ein Kontinuum oder R zerfällt in zwei punktfremde Kontinua R_1, R_2, von denen jedes einen der beiden Endpunkte des Kreisbogens Γ enthält.*

Beweis. Bleibt die Menge R kein Kontinuum, so gibt es einen R nicht treffenden einfachen Streckenzug P, der in seinem Innern ein Stück R_1 von R und in seinem Äußern ein anderes Teilstück R_2 von R enthält. Nach Hilfssatz 3 können wir ferner annehmen, daß P mit dem Innern von Γ höchstens einen Punkt gemeinsam hat. Und zwar muß P den Bogen Γ in der Tat in einem Punkte treffen, da ja sonst P keinen Punkt des Kontinuums C enthielte, und sowohl in seinem Innern als auch in seinem Äußern Punkte von C enthalten wären. Sind aber α, β die beiden Endpunkte von Γ, so durchsetzt nunmehr ihr Verbindungsbogen Γ den Streckenzug P in einem einzigen Punkt, α wird daher von β durch P getrennt.

Wir haben nur noch zu zeigen, daß die Mengen R_1, R_2 ihrerseits Kontinua sind. Nehmen wir nun an, R_1 etwa sei kein Kontinuum. Dann gibt es nach Hilfssatz 3 einen ganz im Innern von P verlaufenden, R_1 nicht treffenden einfachen geschlossenen Streckenzug Q, der sowohl in seinem Innern als auch in seinem Äußern Punkte von R_1 enthält und überdies den Bogen Γ höchstens in einem Punkte trifft (vgl. Fig. 1). Q muß dann Γ

sicher treffen, da sonst Q das Kontinuum C nicht treffen und sowohl in seinem Innern als auch in seinem Äußern Punkte dieses Kontinuums enthalten würde. Wir können offenbar annehmen, daß P und Q den Bogen Γ etwa senkrecht durchsetzen, da dies ja durch eine erlaubte Abänderung dieser Streckenzüge sofort zu erreichen ist. Es sei b das Stück von Γ, das zwischen den beiden Streckenzügen P, Q liegt. Wir verbinden nun P mit Q durch zwei auf verschiedenen Seiten von b liegende Kreisbögen b_1, b_2 um den Mittelpunkt von Γ, deren Abstände von b hinreichend klein sind. Entfernen wir dann die kurzen, zwischen b_1 und b_2 liegenden (in Fig. 1 punktiert gezeichneten) Stücke von P und Q, so werden dadurch P und Q durch b_1, b_2 zu einem einzigen geschlossenen Zug zusammengeschlossen, der C nicht trifft und sowohl in seinem Innern als auch in seinem Äußern Punkte von C enthält, was unmöglich ist. Damit ist der Hilfssatz 4 bewiesen.

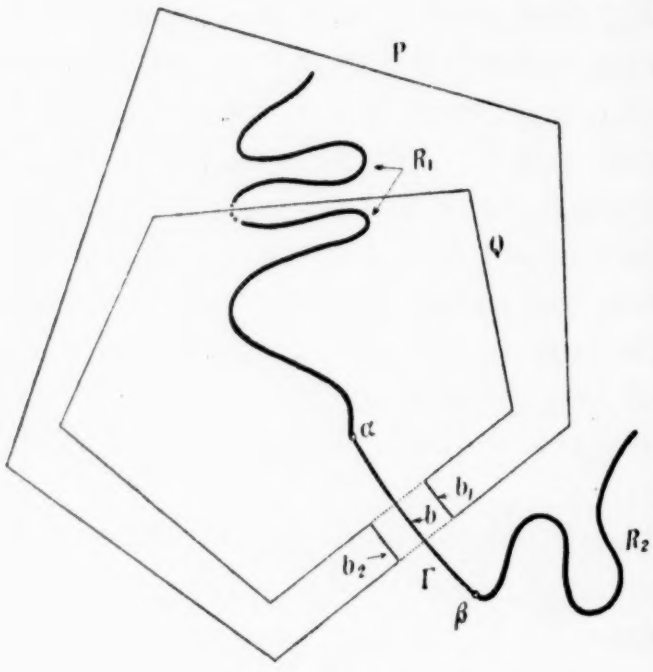


Fig. 1.

Übrigens läßt sich offenbar in den Hilfssätzen 3 und 4 der Kreisbogen Γ auch durch eine geradlinige Strecke ersetzen.

5. Ränder einfach zusammenhängender Gebiete. **Hilfssatz 5.** *Der Rand R jedes einfach zusammenhängenden Gebietes ist ein Kontinuum.*

Beweis. Denn sonst gäbe es einen einfachen geschlossenen Streckenzug P, der sowohl in seinem Innern als auch in seinem Äußern Punkte von R enthielte. Dann muß aber P sowohl in seinem Innern als auch in seinem Äußern Punkte von G enthalten. Zwei solche Punkte lassen sich durch einen in G liegenden einfachen Streckenzug verbinden, der andererseits den Jordanzug P treffen müßte. Dann liegt auf P ein Punkt von G. Und da P den Rand von G nicht trifft, muß jeder Punkt von P zu G gehören. Dann aber müßte entweder jeder im Innern oder jeder im Äußern von P liegende Punkt wegen des einfachen Zusammenhanges von G zu G gehören, während nach der Annahme sowohl innerhalb als auch außerhalb von P Randpunkte von G liegen.

6. Eine Eigenschaft beschränkter einfach zusammenhängender Gebiete. **Hilfssatz 6.** *Es sei H ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet. g sei ein beschränktes Gebiet, dessen Rand r vollständig innerhalb H liegt. Dann liegt jeder Punkt von g innerhalb H.*

Beweis. Es sei O ein Punkt innerhalb g. Da g nach Voraussetzung innerhalb eines hinreichend großen Kreises um O liegt, ist der maximale Abstand eines Punktes von r von O eine endliche positive Zahl S, und es gibt einen Punkt q in r, dessen Abstand von O gleich S ist. Da q nach Voraussetzung innerhalb H liegt, wird die Strecke Oq, über q hinaus verlängert, zunächst in H verlaufen, bis sie einen Punkt des Randes C von H trifft. Daher ist der größte Abstand T eines Punktes von C von O sicher größer als S. Liegt nun ein Punkt p aus g nicht innerhalb H, so läßt sich p sicher durch eine bis auf ihren Endpunkt p_1 innerhalb g verlaufende Strecke s_1 mit einem Randpunkt p_1 von g verbinden. Für p_1 kann z. B. ein Punkt von r genommen werden, dessen Distanz von p am kleinsten ist. Da aber p_1 innerhalb H liegt, muß dann die Strecke s_1 den Rand C von H treffen. Daher liegt ein Punkt von C innerhalb g. Da aber C ein Kontinuum ist, das den Rand von g nicht trifft, muß dann C ganz innerhalb g liegen. Es gibt nun einen

Punkt q_1 auf C derart, daß die Distanz von O bis q_1 gleich T ist. Da aber q_1 innerhalb g liegt, muß die Verlängerung von Oq_1 über q_1 hinaus zunächst in g verlaufen. Der Abstand des ersten über q_1 hinaus auf dieser Strecke angetroffenen Randpunktes von g vom Punkte O wäre sicher größer als T und daher auch größer als S, was der Definition von S widerspricht.

7. Erweiterung eines Gebiets zu einem einfach zusammenhängenden.

Hilfssatz 7. *Es sei G ein Gebiet, das in einem beschränkten einfach zusammenhängenden Gebiet H enthalten ist. Wir bilden die Punktmenge G^*, die erstens aus allen Punkten von G besteht und zweitens aus allen Punkten, die innerhalb von beschränkten Gebieten liegen, deren Rand vollständig in G verläuft. Dann ist die Menge G^* ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das in H enthalten ist. Der Rand von G^* ist im Rand von G enthalten. Ferner ist der Durchschnitt des Randes von G^* mit dem Rand von H gleich dem Durchschnitt des Randes von G mit dem Rande von H.* —

— G^* kann offenbar als das „kleinste" einfach zusammenhängende Gebiet aufgefaßt werden, das G enthält. —

Beweis. Daß G^* eine *offene* Menge ist, ist nach ihrer Entstehung klar. G^* ist aber auch *zusammenhängend*, da jeder Punkt p von G^*, der nicht in G liegt, zu einem Gebiet g gehört, das gleichfalls in G^* liegt, und dessen Rand in G enthalten ist, so daß also p innerhalb G^* mit einem Punkt des Gebietes G verbindbar ist.

Wir zeigen nun, daß G^* *einfach zusammenhängend* ist. Denn es sei K ein ganz in G^* verlaufender einfacher geschlossener Streckenzug; es ist zu beweisen, daß jeder Punkt innerhalb K zu G^* gehört. Verläuft K bereits in G, so ist nichts zu beweisen; ist dies nicht der Fall, so liegt jeder Punkt p von K im Innern eines Gebietes g_p, dessen Rand zu G gehört. Nach dem Überdeckungssatze liegt daher die ganze Menge K innerhalb der Vereinigungsmenge L von endlich vielen Gebieten $g_1, \ldots, g_m$:

$$L = g_1 + \cdots + g_m.$$

Wir können annehmen, daß jedes der Gebiete g_μ einen Punkt von K im Innern enthält. Nehmen wir zu L alle innern Punkte von K hinzu, so entsteht ein Gebiet Q, dessen Rand ganz in G verläuft und dessen Inneres daher zu G^* gehört, womit das gleiche für das Innere von K bewiesen ist.

Ist p ein Punkt von G^*, der zugleich in G liegt, so liegt p auch in H. Sonst liegt p in einem Gebiet g, dessen Rand vollständig in G, daher auch in H liegt. Dann liegt aber nach Hilfssatz 6 g und damit auch p in H. Daher liegt G^* in H.

Es sei p ein Randpunkt von G^*. Gehört p nicht zum Rand von G, so gibt es eine Kreisscheibe $\varkappa$ um p, in der keine Punkte von G vorkommen. Da andererseits p zum Rand von G^* gehört, liegt in $\varkappa$ sicher ein Punkt q von G^*, der dann nicht zu G gehören kann. Dann liegt aber q in einem Gebiet g, dessen Rand zu G und dessen Inneres zu G^* gehört. p muß dann außerhalb des Gebietes g liegen. Auf der Strecke pq, die ganz in $\varkappa$ verläuft, muß aber dann ein Randpunkt von g, d. h. dennoch ein Punkt von G liegen. Mit diesem Widerspruch ist gezeigt, daß der Rand von G^* ganz im Rand von G enthalten ist. Ist also p ein Randpunkt von G^*, der zugleich dem Rande von H angehört, so gehört p auch dem Durchschnitt des Randes von G mit dem Rande von H an.

Ist umgekehrt p ein Randpunkt von G, der zugleich zum Rand von H gehört, so kann p kein innerer Punkt von G^* sein, da p dann auch in H liegen müßte. Da aber p andererseits eine Häufungsstelle von Punkten von G und daher auch von G^* ist, muß p dem Rande von G^* angehören. Damit ist der Hilfssatz 7 vollständig bewiesen.

8. Definition der Gebiete $F_\varkappa$, $F_\varkappa^*$ und der Kontinua $R_\mu^{(\varkappa)}$. Wir können nun an den Beweis des Satzes II gehen. Wir betrachten die Gesamtheit der im Innern des Kreises (R) liegenden Punkte z mit $F(z) > 0$. Die Menge dieser Punkte zerfällt in ein oder mehrere — eventuell unendlich viele — Gebiete, deren Ränder sich erstens aus den Punkten der *positiven* Teilbögen $\langle a_{2\nu-1}, a_{2\nu}\rangle$ und zweitens aus den innerhalb (R) liegenden Nullstellen von $F(z)$ zusammensetzen. Wir betrachten nun diejenigen unter diesen Gebieten, zu denen als ein Randstück wenigstens ein *positiver* Teilbogen $\langle a_{2\nu-1}, a_{2\nu}\rangle$ mit $F(z) > 0$ gehört. Zu einem solchen Gebiet können natürlich auch mehrere Teilbögen $\langle a_{2\nu-1}, a_{2\nu}\rangle$ als Randstücke gehören. Die Endpunkte $a_{2\nu-1}, a_{2\nu}$ jedes dieser positiven Teilbögen bezeichnen wir als *ausgezeichnete Randpunkte* des betreffenden Gebietes. Offenbar kommt jeder der Punkte a_ν in der Berandung eines und nur eines unter diesen Gebieten als ausgezeichneter Randpunkt vor. (Er kann aber sehr wohl in der Berandung anderer unserer Gebiete vorkommen, dann aber nicht mehr als ausgezeichneter Randpunkt.) Die Anzahl k dieser Gebiete ist höchstens n. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_k$. Ferner sei hervorgehoben, daß zum Rand der Gebiete $\mathfrak{F}_\varkappa$ kein innerer Punkt der negativen Teilbögen $(a_{2\nu}, a_{2\nu+1})$ bzw. (a_{2n}, a_1) gehören kann, in denen ja $F(z)$ negativ ist.

Wir bilden nun zu jedem der Gebiete $\mathfrak{F}_\varkappa$ nach der Vorschrift des Hilfssatzes 7 das zugehörige einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{F}_\varkappa^*$. Identifizieren wir ferner das Innere des Kreises (R) mit dem einfach zusammenhängenden Gebiet H des Hilfssatzes 7, so folgt weiter, daß $\mathfrak{F}_\varkappa^*$ alle und nur die Punkte der Kreislinie $|z| = R$ als Randpunkte besitzt, die bereits im Rand von $\mathfrak{F}_\varkappa$ vorkommen. Daher kann im Rand eines $\mathfrak{F}_\varkappa^*$ sicher kein innerer Punkt eines negativen Teilbogens vorkommen.

Der Rand $R^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ des einfach zusammenhängenden Gebietes $\mathfrak{F}_\varkappa^*$ ist nun nach Hilfssatz 5 ein Kontinuum. Entfernen wir daher aus $R^{(\varkappa)}$ nacheinander das Innere der positiven Teilbögen $(a_{2\nu-1}, a_{2\nu})$, die in $R^{(\varkappa)}$ enthalten sind, so zerfällt $R^{(\varkappa)}$ in endlich viele Kontinua $R_1^{(\varkappa)}, \ldots, R_m^{(\varkappa)}$, von denen jedes nach Hilfssatz 4 wenigstens einen der Punkte $a_1, \ldots, a_{2n}$ enthält. Und umgekehrt liegt offenbar jeder Punkt a_ν, der ein Randpunkt von $\mathfrak{F}_\varkappa$ ist, in einem der Kontinua $R_\mu^{(\varkappa)}$.

9. Die erste Haupteigenschaft der Kontinua $R_\mu^{(\varkappa)}$. Wir behaupten nun, daß *jedes dieser $R_\mu^{(\varkappa)}$ wenigstens zwei ausgezeichnete Randpunkte von $\mathfrak{F}_\varkappa$ enthält.*

Denn es sei dies nicht richtig, und es sei die Numerierung so gewählt, daß $R_1^{(\varkappa)}$ nur einen einzigen ausgezeichneten Randpunkt von $\mathfrak{F}_\varkappa$ — wir bezeichnen diesen Punkt mit a_0 — enthält. Es sei δ eine positive Zahl, die kleiner ist als der Abstand des Kontinuums $R_1^{(\varkappa)}$ von den übrigen Kontinua $R_2^{(\varkappa)}, \ldots, R_m^{(\varkappa)}$ und ebenso kleiner als der kleinste Abstand der Punkte a_ν voneinander. Dann entfernen wir aus dem Innern des Kreises (R) sämtliche Punkte der übrigen Kontinua $R_2^{(\varkappa)}, \ldots, R_m^{(\varkappa)}$; dadurch zerfällt das Innere von (R) eventuell in mehrere Gebiete. Wir bezeichnen dasjenige unter diesen Gebieten, das $\mathfrak{F}_\varkappa$ enthält, mit G. $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(l)}$ seien die verschiedenen Punkte a_ν, die eventuell zu $R_1^{(\varkappa)}$ gehören, ohne ausgezeichnete Randpunkte von $\mathfrak{F}_\varkappa$ zu sein. Die inneren Punkte der beiden an einen solchen Punkt $a^{(\lambda)}$ anstoßenden Teilbögen von (R) gehören dann sicher nicht zum Rande von $\mathfrak{F}_\varkappa$. (Es kann aber l auch Null sein; dann enthält $R_1^{(\varkappa)}$ a_0 als den einzigen der Punkte a_ν.) G enthält dann nach unserer Annahme auch sämtliche Punkte von $R_1^{(\varkappa)}$, bis auf die Punkte $a_0, a^{(1)}, \ldots, a^{(l)}$. Wir beschreiben nun um $a_0, a^{(1)}, \ldots, a^{(l)}$ als Mittelpunkte abgeschlossene Kreisscheiben $\varkappa_0, \varkappa^{(1)}, \ldots, \varkappa^{(l)}$ mit dem Radius δ (vgl.

Fig. 2). Die Punkte des in $\varkappa_0$ liegenden Kreisbogens γ von (R) sind dann Randpunkte von G. Andere Randpunkte von G enthält $\varkappa_0$ aber nicht. Ferner enthalten die durch

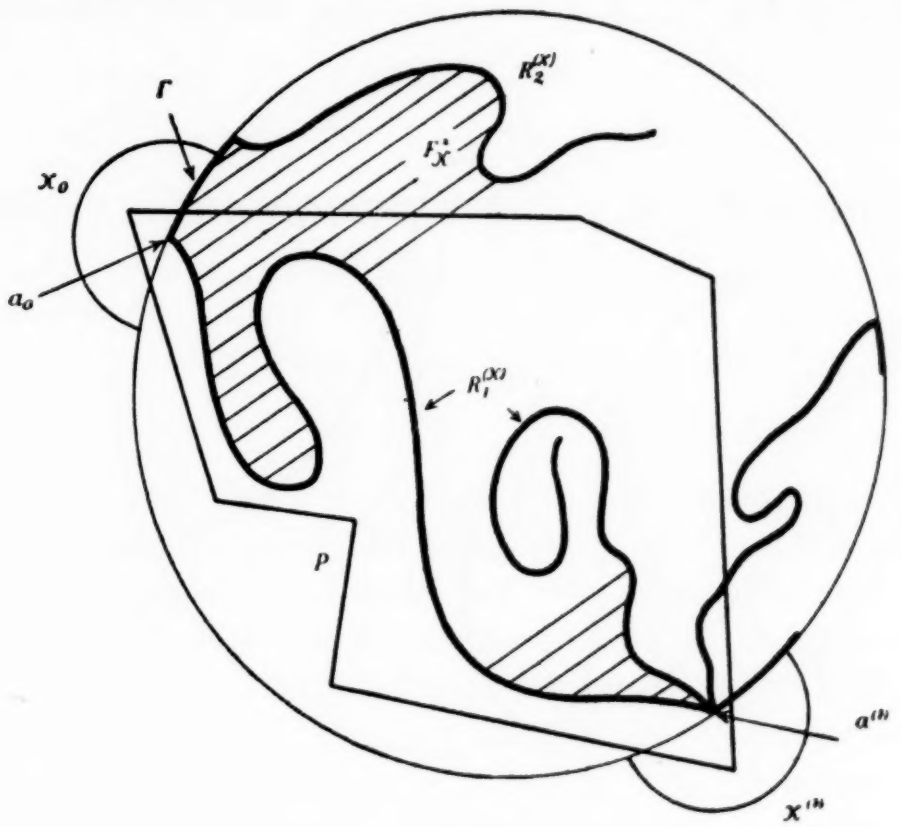


Fig. 2.

die Kreise $\varkappa^{(\lambda)}$ herausgeschnittenen Bögen von (R) jeweils nur einen Randpunkt $a^{(\lambda)}$ von $\mathfrak{F}_{\varkappa}^{*}$. Wir nehmen nun zum Gebiet G alle innern Punkte der Kreisscheiben $\varkappa_0, \varkappa^{(1)}, \ldots, \varkappa^{(l)}$ hinzu und bezeichnen das so entstehende Gebiet mit G_1. Dann liegt $R_1^{(\varkappa)}$ ganz im Innern von G_1.

Der Bogen γ der Kreislinie (R) wird nun durch den Punkt a_0 in zwei Hälften Γ_1, Γ_2 geteilt, von denen Γ_1 zu einem positiven Teilbogen, Γ_2 zu einem negativen gehört. Die innern Punkte von Γ_1 bezeichnen wir mit Γ. Γ ist dann ein offener Kreisbogen, dessen einer Endpunkt a_0 ist, während der andere auf dem Rande von G_1 liegt. Nach den Hilfssätzen 2 und 3 kann man nun im Gebiet G_1 einen einfachen geschlossenen Streckenzug P zeichnen, der das Kontinuum $R_1^{(\varkappa)}$ ganz im Innern enthält und den Bogen Γ entweder gar nicht berührt oder genau einmal durchsetzt. Nun muß P den Bogen Γ wenigstens einmal schneiden, da ja P den Punkt a_0 von $R_1^{(\varkappa)}$ vom Rande von G_1 trennt. Andererseits ist Γ der einzige Randteil von $\mathfrak{F}_{\varkappa}^{*}$, mit dem P Punkte gemeinsam hat. Und da P ein geschlossener Streckenzug ist, müßte es Γ eine *gerade* Anzahl von Malen durchsetzen. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

10. Die zweite Haupteigenschaft der $R_{\mu}^{(\varkappa)}$. Wir behaupten nun weiter, daß *jedes der Kontinua* $R_{\mu}^{(\varkappa)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ *nur zwei ausgezeichnete Randpunkte* a_{α}, a_{β} *von* $\mathfrak{F}_{\varkappa}$ *enthält, und daß dabei die Indizes* α, β *verschiedener Geradheit sind, d. h. inkongruent mod.* 2.

Zum Beweis genügt es offenbar, zu zeigen, daß für zwei ausgezeichnete Randpunkte a_{α}, a_{β} von $\mathfrak{F}_{\varkappa}$, die in einem und demselben Kontinuum $R_{\mu}^{(\varkappa)}$ enthalten sind, die Zahlen α, β nicht beide zugleich gerade oder ungerade sein können. — Denn unter drei ganzen Zahlen gibt es wenigstens zwei, die einander kongruent mod. 2 sind. — Nehmen wir nun an, die Zahlen α, β wären einander kongruent mod. 2. Es seien die an a_{α}, a_{β} anstoßenden positiven Teilbögen mit $\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}$ bezeichnet. Nach Voraussetzung gehören

γ_α, γ_β dem Rande von $\mathfrak{F}_\varkappa$ und daher auch dem Rande von $\mathfrak{F}_\varkappa^*$ an. Es seien b_α, b_β die Mittelpunkte der Bögen γ_α, γ_β. Durch die Punkte b_α, b_β wird die Kreislinie (R) in zwei Bögen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ zerlegt (vgl. Fig. 3). Aus der Annahme, daß $\alpha \equiv \beta (\text{mod. } 2)$ ist, folgt, daß

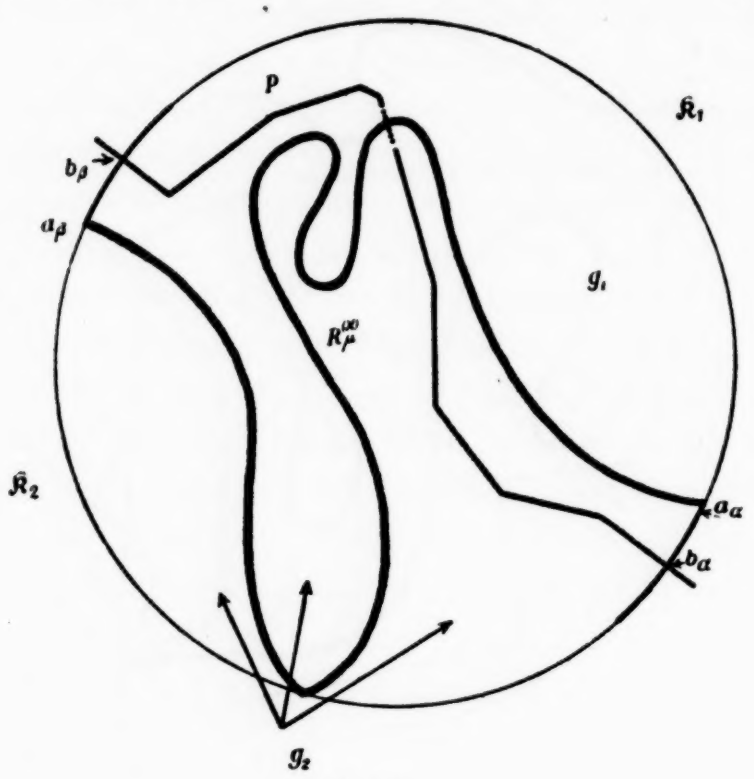


Fig. 3.

beim Durchlaufen der Kreislinie (R) in irgendeiner Richtung die Punkte a_α, a_β entweder beide als Anfangspunkte oder beide als Endpunkte von γ_α, γ_β erscheinen. Daraus folgt, daß die Punkte a_α, a_β *verschiedenen* Bögen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ angehören, und wir können etwa annehmen, daß a_α zu $\mathfrak{K}_1$, a_β zu $\mathfrak{K}_2$ gehört. Da nun b_α, b_β in den freien Randstücken γ_α, γ_β von $\mathfrak{F}_\varkappa$ liegen, können sie durch einen einfachen Streckenzug P verbunden werden, der bis auf die beiden Endpunkte ganz im Innern von $\mathfrak{F}_\varkappa$ verläuft und daher unser Kontinuum $R_\mu^{(\varkappa)}$ nicht trifft. Der Streckenzug P stellt dann einen Querschnitt des Kreises (R) dar und zerlegt das Innere von (R) in zwei Gebiete, von denen das eine, g_1, von P und $\mathfrak{K}_1$, das andere, g_2, von P und $\mathfrak{K}_2$ begrenzt wird. Der Punkt a_β liegt dann sicher außerhalb des Gebietes g_1, da er zum Rande von g_1 nicht gehört und im Innern von g_1 nicht liegen kann, weil g_1 ein Teilgebiet von (R) ist. Nun liegen in der Nähe von a_α Punkte von $R_\mu^{(\varkappa)}$, die zugleich innerhalb (R) und daher innerhalb g_1 liegen. Und da der Punkt a_β außerhalb g_1 liegt, sehen wir, daß das Kontinuum $R_\mu^{(\varkappa)}$ sowohl innerhalb als auch außerhalb von g_1 Punkte besitzt und daher den Rand von g_1 in einem Punkte p durchsetzen muß. p kann nun nicht auf der Kreislinie (R) liegen, denn sonst müßte p mit einem der Punkte a_ν identisch sein, und die nächste Umgebung eines Punktes a_ν, sofern sie zum Innern von (R) gehört, muß nach unserer Konstruktion zum Innern eines der Gebiete g_1 oder g_2 gehören. Daher liegt p innerhalb (R), d. h. auf dem Streckenzug P, während P nach Voraussetzung das Kontinuum R nicht treffen kann. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Aus den beiden Haupteigenschaften der $R_\mu^{(\varkappa)}$ ergibt sich aber der Satz II unmittelbar.

Eingegangen 16. Oktober 1932.

Simultane Transformationen für gewisse Klassen von Raumkurven.

Von *Hans Jonas* in Berlin-Steglitz.

1. *Einleitung.* — Bei der Behandlung der Moutardschen Differentialgleichungen mit n durch eine quadratische Relation verbundenen Lösungen ist Bianchi im Falle $n = 4$ zu einer bemerkenswerten Klasse von Paaren isometrischer Flächen gelangt [1]). Auf denselben bildet die Doppelschar derjenigen Kurven, deren Flexion (erste Krümmung) bei der Abwicklung der einen Fläche auf die andere ungeändert bleibt, ein Tschebyschefsches Netz. Einen anderen Zugang zur Transformationstheorie dieser Flächenpaare liefert, wie ich unlängst dargelegt habe, die Ribaucoursche Transformation der elliptischen Geometrie [2]). Von den dabei gewonnenen neuen Ergebnissen seien hier die für das Folgende wichtigen erwähnt.

Es ist dies einmal eine kurventheoretische Eigenschaft der betreffenden Tschebyschefschen Netze: entsprechende Kurven haben auf beiden Flächen nicht nur dasselbe Linienelement und gleiche Flexion, sondern sind überdies dadurch ausgezeichnet, daß die Differenz ihrer Torsionen konstant ist. Mit der Beseitigung der Quadraturen, durch die bei Bianchi die laufenden Koordinaten der transformierten Flächen dargestellt werden, trat die einfache Beziehung zutage, daß die Punkte der beiden transformierten Flächen von denen der gegebenen den gleichen konstanten Abstand haben. Dazu kommt eine weitere Tatsache, die ich a. a. O. nur in einer Fußnote angedeutet habe: die Transformation erweist sich als nicht elementarer Prozeß, insofern als sie auf die Ermittlung zweier komplexer, mit Rücksicht auf die Realität allerdings konjugiert-komplexer Lösungen zweier selbständiger totaler Differentialgleichungen vom Riccatischen Typus zurückgeführt werden kann. Darüber hinaus ergibt die Zusammensetzung derartiger imaginärer Elementaroperationen allgemeinere reelle Transformationen, bei denen die konstanten Abstände für die Flächen des Paares verschiedene Werte annehmen [3]).

Diesem erweiterten Standpunkt entspricht die nachstehend entwickelte Kurventransformation, durch die nicht bloß Paare, sondern einfach-unendliche Mannigfaltigkeiten von Raumkurven simultan erfaßt werden. Eine solche *Klasse* von Kurven, wie wir sagen wollen [4]), enthält *alle diejenigen, die mit einer beliebig gegebenen die Bogenlänge*

[1]) Bianchi, Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni. Mem. della Soc. Ital. delle Sc. (detta dei XL) (3) **13** (1904), S. 261; daselbst § 15 ff.

[2]) Jonas, Die Ribaucoursche Transformation der sphärisch-elliptischen Geometrie als Transformationsprinzip im euklidischen Raume. Math. Ann. **107** (1932), S. 420; s. §§ 4 u. 7.

[3]) Eine nähere Erörterung dieses Punktes ist für das Verständnis des Folgenden nicht erforderlich. Ich beabsichtige aber, auf die Bianchischen Flächenpaare in einer besonderen Arbeit zurückzukommen.

[4]) Wiewohl die Bezeichnung Kurven*klasse* noch in anderem, speziellem Sinne gebräuchlich ist, erschienen Ausdrücke wie Schar oder System ungeeignet, da die Kurvenmannigfaltigkeit ohne Rücksicht auf Lagebeziehungen im Raume betrachtet wird. Die Darstellung derselben verlangt die Integration der natürlichen Kurvengleichungen für jedes $c \neq 0$.

und die Flexion gemein haben und sich von ihr durch eine konstante Torsionsdifferenz c unterscheiden. Die Transformation, die von zwei charakteristischen, d. h. bereits in den Differentialgleichungen auftretenden Konstanten h, k abhängt, läßt die Bogenlänge ungeändert; die konstanten Abstände der Kurvenpunkte sind durch h, k und c bestimmt, also für die einzelnen Kurven der Klasse im allgemeinen verschieden. Es gilt nun auch hier wie bei den mannigfachen geometrischen Prozessen des Bianchischen Ideenkreises ein *Vertauschbarkeitssatz*, dem zufolge sich die Transformationen, und zwar simultan für die ganze Kurvenklasse, zu viergliedrigen Zyklen zusammenfügen lassen. Wir liefern damit gleichzeitig einen Beitrag zur Theorie der *bewegten windschiefen Gelenkvierecke mit paarweise gleichen Gegenseiten*, deren Ecken Kurven gleicher Bogenlänge beschreiben; sie können sich im besonderen Falle auf überschlagene ebene Vierecke reduzieren.

In methodischer Hinsicht dürfte der Kunstgriff interessieren, durch den eine wesentliche Vereinfachung der Rechnungen bewirkt wird. Wir lassen nämlich im Laufe der Untersuchung an die Stelle des üblichen begleitenden Dreikants ein Hilfsdreikant treten, bei dem Hauptnormale und Binormale durch ein anderes Paar rechtwinkliger Normalen ersetzt sind.

2. *Aufstellung der Differentialgleichungen für die Kurventransformation $T(h, k)$.* — Es sei s die als Parameter dienende Bogenlänge einer willkürlich gewählten Raumkurve, ϱ ihre Flexion und τ ihre Torsion. Wir betrachten nun also die Klasse der ∞^1 ihr punktweise zugeordneten Kurven, die gleichfalls die Bogenlänge s und die Flexion ϱ besitzen, während die Torsion den um die additive Konstante c verschiedenen Wert $\tau + c$ erhält. Nennen wir für eine solche durch c bestimmte, vom Punkte $P(x, y, z)$ beschriebene Kurve den Flexionsradius R und den Torsionsradius T, so gelten die Formeln:

$$(1) \qquad \frac{1}{R} = \varrho(s), \quad \frac{1}{T} = \tau(s) + c,$$

die sich als die natürlichen Gleichungen der Kurve $(P; x)$ [5]) auffassen lassen.

Wir führen das begleitende rechtwinklige Dreikant (X, X', X'') ein, Reihenfolge der Richtungen wie üblich: Tangente X, Hauptnormale X', Binormale X'', und setzen es als gleichstimmig mit dem Dreikant der positiven Koordinatenachsen voraus. Es ist:

$$(2) \qquad \frac{dx}{ds} = X;$$

die Frenetschen Differentialrelationen nehmen die folgende Form an:

$$(3) \qquad \frac{dX}{ds} = \varrho X', \quad \frac{dX'}{ds} = -\varrho X - (\tau + c) X'', \quad \frac{dX''}{ds} = (\tau + c) X'.$$

Um durch einen simultanen Prozeß die Gesamtheit der Kurven in eine analoge Klasse zu verwandeln, lassen wir von dem laufenden Kurvenpunkt P einen *Vektor* ausgehen, *dessen Orientierung in bezug auf das begleitende Dreikant jeweils für alle Kurven die gleiche sein soll, während sein Betrag $\varkappa$ längs jeder einzelnen Kurve als konstant angenommen wird, also von c abhängen kann.* Die gewünschte Transformation ergibt sich dann auf Grund der Forderung, daß *auch die Endpunkte P_1 dieser Vektoren Kurven mit der Bogenlänge s bilden.* Demnach sei gesetzt:

$$(4) \qquad x_1 = x + \varkappa[\sin\theta\,(\cos\varphi X + \sin\varphi X') + \cos\theta X''],$$

wobei die Winkel θ und φ die gesuchten Funktionen von s sind.

Wir differentiieren (4) mit Hilfe von (2) und (3), setzen zur Abkürzung:

---

[5]) Der Buchstabe x soll den Vektor x, y, z vertreten. Entsprechend sagen wir: Richtung X, wenn X, Y, Z die Richtungskosinus sind. Eine in x geschriebene Gleichung hat im folgenden stets vektorielle Bedeutung, ist also, ohne daß darauf besonders hingewiesen wird, durch Hinzufügung der analogen Beziehungen in y und in z zu ergänzen.

$$(5)\qquad \frac{d\theta}{ds} + \tau \sin\varphi = U, \qquad \sin\theta\left(\frac{d\varphi}{ds} + \varrho + \tau \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\right) = V$$

und schreiben das Ergebnis in der folgenden Gestalt:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{ds} = X + \varkappa U\left[\cos\theta\,(\cos\varphi\, X + \sin\varphi\, X') - \sin\theta\, X''\right] \\ \qquad\qquad + \varkappa V(-\sin\varphi\, X + \cos\varphi\, X') + \varkappa c(\cos\theta\, X' - \sin\theta\sin\varphi\, X''). \end{cases}$$

Die Bedingung dafür, daß das Bogenelement erhalten bleibt, lautet: $\sum\left(\dfrac{dx_1}{ds}\right)^2 = 1$ und liefert die Beziehung:

$$(7)\qquad \begin{cases} \varkappa(U^2 + V^2) + 2U(\cos\theta\cos\varphi + \varkappa c\sin\varphi) + 2V(\varkappa c\cos\theta\cos\varphi - \sin\varphi) \\ \qquad\qquad + \varkappa c^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0. \end{cases}$$

Wir drücken U und V mittels zweier neuer Hilfsgrößen h und k aus:

$$(8)\qquad \begin{cases} U = -h\cos\theta\cos\varphi + k\sin\varphi, \\ V = \quad k\cos\theta\cos\varphi + h\sin\varphi. \end{cases}$$

Dadurch verwandelt sich (7) in :

$$\varkappa[h^2 + (k + c)^2] - 2h = 0.$$

Damit für jedes c der Ausdruck

$$(9)\qquad \varkappa = \frac{2h}{h^2 + (k + c)^2}$$

konstant wird, müssen h und k Konstanten sein.

Aus (5) und (8) entnimmt man jetzt für das Funktionenpaar θ, φ die beiden simultanen Differentialgleichungen:

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{ds} = -h\cos\theta\cos\varphi - (\tau - k)\sin\varphi, \\ \dfrac{d\varphi}{ds} = h\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} - \varrho - (\tau - k)\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi, \end{cases}$$

die c nicht enthalten, also einen Transformationsprozeß für die ganze Kurvenklasse definieren. Derselbe sei unter Hervorhebung der verfügbaren *charakteristischen Konstanten* h, k mit $T(h, k)$ bezeichnet. Man übersieht, daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit $h > 0$ angenommen werden kann. Bei der Integration des Systems (10) treten zwei willkürliche Konstanten auf, die Anfangswerte von θ und φ für $s = s_0$. Die transformierten Kurven $(P_1; x_1)$ stellen sich nach (4) und (9) folgendermaßen dar:

$$(11)\qquad x_1 = x + \frac{2h}{h^2 + (k + c)^2}\left[\sin\theta\,(\cos\varphi X + \sin\varphi X') + \cos\theta X''\right].$$

3. *Zurückführung der Operation $T(h, k)$ auf zwei Riccatische Differentialgleichungen.*— Ehe wir den Nachweis erledigen, daß die transformierten Kurven auch ihrerseits mit der (bereits bestehenden) Gleichheit der Bogenelemente Gleichheit der Flexionen und konstante Differenz der Torsionen verbinden, wollen wir zeigen, daß *die beiden simultanen Differentialgleichungen* (10) *mit zwei einzelnen Riccatischen Gleichungen äquivalent sind.*

Zu diesem Zweck benutzen wir, um P_1 auf der den Punkt P begleitenden Kugel vom konstanten Radius $\varkappa$ festzulegen, statt der sphärischen Koordinaten θ, φ die konjugiert-komplexen Parameter u, v der Minimallinien. Wir setzen also:

$$(12)\qquad x_1 = x + \frac{2h}{h^2 + (k + c)^2}\left[\frac{u + v}{uv + 1}X - \frac{i(u - v)}{uv + 1}X' + \frac{uv - 1}{uv + 1}X''\right].$$

Den Übergang zu der Darstellung (11) vermittelt die Substitution:

$$u = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi}, \quad v = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi}. \tag{13}$$

Differentiiert man die Formeln (13), so gelangt man unschwer mit Hilfe von (10) zu den beiden Riccatischen Gleichungen für u und v:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{ds} = -i\varrho u + (h + ik - i\tau)\dfrac{1}{2}(u^2 - 1), \\ \dfrac{dv}{ds} = \quad i\varrho v + (h - ik + i\tau)\dfrac{1}{2}(v^2 - 1). \end{cases} \tag{14}$$

Diese sind zwar voneinander unabhängig, doch hat man, um eine reelle Transformation $T(h, k)$ zu definieren, ein Paar konjugiert-komplexer Integrale u, v zu wählen. Beachtenswert erscheint, daß eine jede der beiden Gleichungen (14) der Gestalt nach mit derjenigen Riccatischen Differentialgleichung übereinstimmt, auf die das Problem der natürlichen Kurvengleichungen führt. Wir können sagen: *Die Transformation $T(h, k)$ ist analytisch gleichbedeutend mit der Ermittlung zweier imaginärer Kurven der betrachteten Klasse, die zu den Werten $-(k \pm ih)$ der Konstanten c gehören.*

4. *Einführung des Hilfsdreikants. Neue Form der Differentialgleichungen.* — Aus (6) und (8) erhält man die Tangentenrichtung X_1 der transformierten Kurve in P_1:

$$X_1 = \alpha X + \alpha' X' + \alpha'' X'', \tag{15}$$

wobei

$$\begin{cases} \alpha \;\; = 1 - \varkappa h\,(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi), \\ \alpha' \;\; = \varkappa[h\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + (k + c)\cos\theta], \\ \alpha'' \;\; = \varkappa\sin\theta\,[h\cos\theta\cos\varphi - (k + c)\sin\varphi] \end{cases} \tag{16}$$

ist. Die Richtungen X_1' und X_1'' von Hauptnormale und Binormale können durch Differentiation von (15), (16) ermittelt werden, doch ergeben sich wenig handliche Ausdrücke für die Koeffizienten. Auf vollends unübersichtliche Rechnungen führt der Versuch, auf der bisherigen Grundlage die Zusammensetzung der Transformationen zu behandeln.

Als höchst fruchtbar erweist sich nun der Gedanke, das begleitende Dreikant (X, X', X'') der Kurve $(P; x)$ durch ein *Hilfsdreikant* $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$ zu ersetzen, bei dem die Tangentenrichtung X beibehalten ist, während an die Stelle von Hauptnormale und Binormale ein anderes rechtwinkliges Normalenpaar $X^{(1)}, X^{(2)}$ tritt, das gegen die ersteren um einen variablen, *für die sämtlichen Kurven der Klasse* aber *gleichen* Winkel χ gedreht erscheint. Dieser sei unter willkürlicher Festsetzung der additiven Konstante durch die Quadratur

$$\chi = \int \tau ds \;^{6}) \tag{17}$$

definiert. Es wird dann:

$$\begin{cases} X' \;\; = \cos\chi\, X^{(1)} - \sin\chi\, X^{(2)}, \\ X'' \;\; = \sin\chi\, X^{(1)} + \cos\chi\, X^{(2)}. \end{cases} \tag{18}$$

Aus den Frenetschen Formeln (3) erhält man die Beziehungen:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{ds} = r\,X^{(1)} - p\,X^{(2)}, \\ \dfrac{dX^{(1)}}{ds} = pX^{(2)} - rX, \\ \dfrac{dX^{(2)}}{ds} = qX - pX^{(1)} \end{cases} \tag{19}$$

---

[6]) Für eine einzelne Kurve ist also $\chi = -cs + \int \dfrac{ds}{T}$.

mit den folgenden Werten der drei sogen. *Rotationen* p, q, r:

$$p = -c, \quad q = \varrho \sin \chi, \quad r = \varrho \cos \chi. \tag{20}$$

Wir knüpfen hieran eine für später wichtige Bemerkung. Führt der laufende Punkt irgendeiner Raumkurve ein rechtwinkliges Dreikant $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$ mit, gebildet von der Tangente und einem Normalenpaar, und sind p, q, r die zugehörigen, in den Gleichungen (19) auftretenden Rotationen, so werden die Richtungen der Hauptnormale und der Binormale durch (18) gegeben, wobei sich der Winkel χ aus

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{q}{r} \qquad \left(\frac{\sin \chi}{q} > 0\right) \tag{21}$$

bestimmt; gleichzeitig werden Flexion und Torsion:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{q^2 + r^2}}, \qquad \frac{1}{T} = \frac{d\chi}{ds} - p = \frac{r\frac{dq}{ds} - q\frac{dr}{ds}}{q^2 + r^2} - p. \tag{22}$$

Zur Darstellung der Transformation $T(h, k)$ sollen von nun an *drei transformierende Funktionen* λ, μ, ν dienen, auf die man geführt wird, wenn man den Vektor PP_1 auf das mit P verbundene Hilfsdreikant $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$ bezieht. Wird nämlich

$$x_1 = x + \frac{2}{h^2 + (k + c)^2} (\lambda X + \mu X^{(1)} + \nu X^{(2)}) \tag{23}$$

gesetzt, so findet man mit Benutzung von (11) und (18):

$$\begin{cases} \lambda = h \sin \theta \sin \varphi, \\ \mu = h (\sin \theta \sin \varphi \cos \chi + \cos \theta \sin \chi), \\ \nu = h(- \sin \theta \sin \varphi \sin \chi + \cos \theta \cos \chi). \end{cases} \tag{24}$$

Die drei Größen sind durch die quadratische Relation

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = h^2 \tag{25}$$

verbunden und erfüllen das folgende System simultaner Differentialgleichungen, das nach Differentiation der Ausdrücke (24) ohne Schwierigkeiten aus (10) hergeleitet werden kann:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{ds} = r\mu - q\nu + \lambda^2 - h^2, \\ \frac{d\mu}{ds} = -r\lambda + k\nu + \lambda\mu, \\ \frac{d\nu}{ds} = q\lambda - k\mu + \lambda\nu. \end{cases} \tag{26}$$

Bei der Integration desselben spielt (25) die Rolle einer Anfangsbedingung.

Diese neue analytische Form des Transformationsprozesses liegt den weiteren Entwicklungen, insbesondere dem Beweise des Vertauschbarkeitssatzes zugrunde. Wir erwähnen aber beiläufig, daß sich (26) noch durch ein System *homogener* und *linearer* Differentialgleichungen für *vier* unbekannte Funktionen $\lambda', \mu', \nu', \vartheta'$ ersetzen läßt:

$$\frac{d\lambda'}{ds} = r\mu' - q\nu' - h^2\vartheta', \quad \frac{d\mu'}{ds} = -r\lambda' + k\nu',$$
$$\frac{d\nu'}{ds} = q\lambda' - k\mu', \qquad \frac{d\vartheta'}{ds} = -\lambda';$$

dazu tritt die jetzt ebenfalls homogene quadratische Relation:

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = h^2\vartheta'^2.$$

Es ist dann:

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\vartheta'}, \qquad \mu = \frac{\mu'}{\vartheta'}, \qquad \nu = \frac{\nu'}{\vartheta'}.$$

5. *Die ∞^1 transformierten Kurven als neue Klasse der betrachteten Art.* — Wir bilden $X_1 = \frac{dx_1}{ds}$ aus (23) mit Benutzung von (19) und (26):

$$X_1 = \frac{1}{h^2 + (k+c)^2}\{[(k+c)^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2]\,X + 2[\lambda\mu + (k+c)\,\nu]\,X^{(1)} + 2[\lambda\nu - (k+c)\,\mu]\,X^{(2)}\}.$$

Die Gestalt dieser Formel legt es nahe, die vier Größen $\lambda, \mu, \nu, k+c$ als *Eulersche Parameter einer Drehung*[7]) zu deuten, vermöge deren wir dann auch dem Punkte P_1 ein Dreikant $(X_1, X_1^{(1)}, X_1^{(2)})$ zuordnen können. Nachträglich wird es sich darum handeln, durch Ermitteln der zu $(X_1, X_1^{(1)}, X_1^{(2)})$ gehörigen Rotationen p_1, q_1, r_1 den Nachweis zu erbringen, daß dieses Dreikant für die transformierte Kurve $(P_1; x_1)$ genau dieselbe Bedeutung besitzt wie das Hilfsdreikant $(X, X^{(1)}, X^{(2)})$ für die ursprüngliche Kurve $(P; x)$.

Die durch $\lambda, \mu, \nu, k+c$ definierte Drehung stellt sich als orthogonale (in den Buchstaben X, Y, Z gültige) Substitution mit der Determinante $+1$ dar:

$$(27) \qquad \begin{cases} X_1 = \alpha\,X + \beta\,X^{(1)} + \gamma\,X^{(2)}, \\ X_1^{(1)} = \alpha_1 X + \beta_1 X^{(1)} + \gamma_1 X^{(2)}, \\ X_1^{(2)} = \alpha_2 X + \beta_2 X^{(1)} + \gamma_2 X^{(2)}; \end{cases}$$

die Koeffizienten haben die folgende Form:

$$(28) \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{D}[(k+c)^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2], & \beta = \frac{2}{D}[\lambda\mu + (k+c)\,\nu], & \gamma = \frac{2}{D}[\lambda\nu - (k+c)\,\mu], \\ \alpha_1 = \frac{2}{D}[\lambda\mu - (k+c)\,\nu], & \beta_1 = \frac{1}{D}[(k+c)^2 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2], & \gamma_1 = \frac{2}{D}[\mu\nu + (k+c)\,\lambda], \\ \alpha_2 = \frac{2}{D}[\lambda\nu + (k+c)\,\mu], & \beta_2 = \frac{2}{D}[\mu\nu - (k+c)\,\lambda], & \gamma_2 = \frac{1}{D}[(k+c)^2 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2], \end{cases}$$

$$D = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + (k+c)^2 = h^2 + (k+c)^2.$$

Zur Berechnung von p_1, q_1, r_1 entnehmen wir den für den Index 1 geschriebenen Relationen (19) die Ausdrücke:

$$p_1 = \sum \frac{dX_1^{(1)}}{ds} X_1^{(2)}, \quad q_1 = \sum \frac{dX_1^{(2)}}{ds} X_1, \quad r_1 = \sum \frac{dX_1}{ds} X_1^{(1)}.$$

Dieselben liefern, wenn wir die Gleichungen (27) vorläufig nur unter Verwendung von (19) differentiieren und zur Abkürzung

$$(29) \qquad \frac{d\alpha_1}{ds}\alpha_2 + \frac{d\beta_1}{ds}\beta_2 + \frac{d\gamma_1}{ds}\gamma_2 = \mathrm{P}, \qquad \frac{d\alpha_2}{ds}\alpha + \cdots = \mathrm{Q}, \qquad \frac{d\alpha}{ds}\alpha_1 + \cdots = \mathrm{R}$$

setzen, nach leicht zu übersehender Umformung:

$$(30) \qquad \begin{cases} p_1 = \mathrm{P} + p\alpha + q\beta + r\gamma, \\ q_1 = \mathrm{Q} + p\alpha_1 + q\beta_1 + r\gamma_1, \\ r_1 = \mathrm{R} + p\alpha_2 + q\beta_2 + r\gamma_2. \end{cases}$$

Der nächste Schritt besteht darin, daß wir P, Q, R mittels (28) und der daraus durch Differentiation hervorgehenden Beziehungen ausdrücken:

---

[7]) Vgl. dazu etwa Darboux, Leçons sur la Théorie générale des Surfaces 4 (1896), S. 435.

$$(31)\qquad \begin{cases} \mathrm{P} = \dfrac{2}{D}\left[\dfrac{d\mu}{ds}\,\nu - \dfrac{d\nu}{ds}\,\mu + (k+c)\,\dfrac{d\lambda}{ds}\right], \\ \mathrm{Q} = \dfrac{2}{D}\left[\dfrac{d\nu}{ds}\,\lambda - \dfrac{d\lambda}{ds}\,\nu + (k+c)\,\dfrac{d\mu}{ds}\right], \\ \mathrm{R} = \dfrac{2}{D}\left[\dfrac{d\lambda}{ds}\,\mu - \dfrac{d\mu}{ds}\,\lambda + (k+c)\,\dfrac{d\nu}{ds}\right]. \end{cases}$$

In diese Formeln tragen wir die durch (26) gegebenen Ableitungen von λ, μ, ν ein. Wir ersetzen schließlich in (30) noch α, β usw. durch die Ausdrücke (28). Nach einigen Reduktionen, bei denen man auch die quadratische Relation (25) heranzuziehen hat, ergibt sich die gesuchte Darstellung von p_1, q_1, r_1, deren Einfachheit als besonderer Erfolg der Methode zu bewerten ist:

$$(32)\qquad p_1 = -c,\quad q_1 = q + 2\nu,\quad r_1 = r - 2\mu.$$

q_1 und r_1 sind von c unabhängig; die transformierten Kurven haben also, wie aus der ersten Formel (22) zu ersehen ist, alle die gleiche Flexion:

$$\frac{1}{R_1} = \varrho_1 = \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + r_1^2}}.$$

Schreibt man die zweite Formel (22) für den Index 1 und setzt den von c unabhängigen Ausdruck

$$\frac{r_1\dfrac{dq_1}{ds} - q_1\dfrac{dr_1}{ds}}{q_1^2 + r_1^2} = \tau_1,$$

so gilt wegen $p_1 = -c$ in Übereinstimmung mit (1) die Beziehung:

$$\frac{1}{T_1} = \tau_1 + c.$$

Man erkennt: *Die Gesamtheit der ∞^1 transformierten Kurven bildet eine Klasse, die derjenigen der gegebenen Kurven völlig analog ist, charakterisiert durch Gleichheit der Bogenlängen und der Flexionen und durch konstante Differenz der Torsionen.* Erst dieses Ergebnis berechtigt dazu, von einer simultanen Transformation der Kurven*klasse* zu sprechen.

Bei jeder Transformation $T(h, k)$ lassen sich übrigens die Kurven der Klasse zu Paaren vereinigen, für die die Abstände PP_1 gleich werden. Die Konstanten c, c' zweier solcher Kurven genügen der Relation $c + c' = -2k$.

Es sei ferner noch bemerkt, daß der Strahl PP_1 relativ zu den beiden mit P und P_1 verbundenen Hilfsdreikanten gleich orientiert ist. Im Zusammenhang damit überzeugt man sich leicht davon, daß bei der inversion Operation $T(h, k)$ die transformierenden Funktionen $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ sind.

6. *Der Vertauschbarkeitssatz für die Transformationen $T(h, k)$.* — Auch für unsere Transformationen $T(h, k)$ gilt als überaus wirksames Prinzip der Zusammensetzung ein *Vertauschbarkeitssatz*, der jetzt hergeleitet werden soll. Wir sprechen ihn in der folgenden Fassung aus: *Gehen aus einunderselben Raumkurve $(P; x)$ mittels zweier Transformationen $T(h_1, k_1)$ und $T(h_2, k_2)$ die beiden Kurven $(P_1; x_1)$ und $(P_2; x_2)$ hervor, so existiert mit Ausnahme des Falles, daß gleichzeitig $h_2 = h_1$, $k_2 = k_1$ ist, eine einzige vierte, durch algebraische Operationen bestimmbare Kurve $(\bar{P}; \bar{x})$, die (unter Vertauschung der Konstantenpaare) mit $(P_1; x_1)$ durch eine Transformation $T(h_2, k_2)$ und mit $(P_2; x_2)$ durch eine $T(h_1, k_1)$ zusammenhängt; die Konstruktion solcher viergliedriger Transformationszyklen erfolgt simultan für alle Kurven, die einer Klasse der von uns betrachteten Art angehören.*

Der Beweis des Theorems erfordert einigen Aufwand an Rechnung. Wir ermitteln

in dem vorliegenden Artikel die beiden neuen Tripel transformierender Funktionen; der folgende bringt dann die Darstellung der vierten Kurve und die Bestätigung der Eindeutigkeit. Der Klarheit wegen erscheint es unerläßlich, das System (25), (26), von dessen Integration der geometrische Prozeß abhängt, für die vier Transformationen einzeln hinzuschreiben.

Als *gegeben* seien also zwei Transformationen $T(h_1, k_1)$, $T(h_2, k_2)$ angenommen (transformierende Funktionen λ_1, μ_1, ν_1 und λ_2, μ_2, ν_2), durch die sich die ursprüngliche Kurve $(P; x)$ in $(P_1; x_1)$ und $(P_2; x_2)$ verwandelt. Die beiden Gleichungssysteme lauten:

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_1}{ds} = r\mu_1 - q\nu_1 + \lambda_1^2 - h_1^2, \\ \dfrac{d\mu_1}{ds} = -r\lambda_1 + k_1\nu_1 + \lambda_1\mu_1, \\ \dfrac{d\nu_1}{ds} = q\lambda_1 - k_1\mu_1 + \lambda_1\nu_1, \\ \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = h_1^2, \end{cases}$$

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_2}{ds} = r\mu_2 - q\nu_2 + \lambda_2^2 - h_2^2, \\ \dfrac{d\mu_2}{ds} = -r\lambda_2 + k_2\nu_2 + \lambda_2\mu_2, \\ \dfrac{d\nu_2}{ds} = q\lambda_2 - k_2\mu_2 + \lambda_2\nu_2, \\ \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = h_2^2. \end{cases}$$

Die Werte der zu $(P_1; x_1)$ und $(P_2; x_2)$ gehörigen Rotationen werden nach (32):

$$(35)\qquad q_1 = q + 2\nu_1, \quad r_1 = r - 2\mu_1, \qquad q_2 = q + 2\nu_2, \quad r_2 = r - 2\mu_2$$

und $p_1 = p_2 = -c$. Die Kurven selber erhält man aus (23):

$$(36)\qquad x_1 = x + \frac{2}{h_1^2 + (k_1 + c)^2}(\lambda_1 X + \mu_1 X^{(1)} + \nu_1 X^{(2)}),$$

$$(37)\qquad x = x + \frac{2}{h_2^2 + (k_2 + c)^2}(\lambda_2 X + \mu_2 X^{(1)} + \nu_2 X^{(2)}).$$

Gesucht werden zwei weitere Transformationen, nämlich eine auf $(P_1; x_1)$ anzuwendende $T(h_2, k_2)$ mit $\bar\lambda_1, \bar\mu_1, \bar\nu_1$ und eine $T(h_1, k_1)$ mit $\bar\lambda_2, \bar\mu_2, \bar\nu_2$, der $(P_2; x_2)$ unterworfen werden soll. Die betreffenden Gleichungssysteme sind:

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\bar\lambda_1}{ds} = r_1\bar\mu_1 - q_1\bar\nu_1 + \bar\lambda_1^2 - h_2^2, \\ \dfrac{d\bar\mu_1}{ds} = -r_1\bar\lambda_1 + k_2\bar\nu_1 + \bar\lambda_1\bar\mu_1, \\ \dfrac{d\bar\nu_1}{ds} = q_1\bar\lambda_1 - k_2\bar\mu_1 + \bar\lambda_1\bar\nu_1, \\ \bar\lambda_1^2 + \bar\mu_1^2 + \bar\nu_1^2 = h_2^2, \end{cases}$$

$$(39)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\bar\lambda_2}{ds} = r_2\bar\mu_2 - q_2\bar\nu_2 + \bar\lambda_2^2 - h_1^2, \\ \dfrac{d\bar\mu_2}{ds} = -r_2\bar\lambda_2 + k_1\bar\nu_2 + \bar\lambda_2\bar\mu_2, \\ \dfrac{d\bar\nu_2}{ds} = q_2\bar\lambda_2 - k_1\bar\mu_2 + \bar\lambda_2\bar\mu_2, \\ \bar\lambda_2^2 + \bar\mu_2^2 + \bar\nu_2^2 = h_1^2. \end{cases}$$

Dabei wird *verlangt*, daß beide Operationen die gleiche Kurve $(\bar{P}; \bar{x})$ ergeben:

$$(40)\qquad \begin{cases} \bar{x} = x_1 + \dfrac{2}{h_2^2 + (k_2 + c)^2}\,(\bar{\lambda}_1 X_1 + \bar{\mu}_1 X_1^{(1)} + \bar{\nu}_1 X_1^{(2)}) \\ \quad = x_2 + \dfrac{2}{h_1^2 + (k_1 + c)^2}\,(\bar{\lambda}_2 X_2 + \bar{\mu}_2 X_2^{(1)} + \bar{\nu}_2 X_2^{(2)}). \end{cases}$$

Eine erste, und zwar höchst einfache Gruppe von Beziehungen für die sechs gesuchten Funktionen findet man, indem man zunächst die Rotationen des zu $(\bar{P}; \bar{x})$ gehörigen Hilfsdreikants in doppelter Weise ausdrückt:

$$\bar{q} = q_1 + 2\bar{\nu}_1 = q_2 + 2\bar{\nu}_2, \qquad \bar{r} = r_1 - 2\bar{\mu}_1 = r_2 - 2\bar{\mu}_2.$$

Mit Berücksichtigung von (35) hat man dann:

$$(41)\qquad \bar{\mu}_1 + \mu_1 = \bar{\mu}_2 + \mu_2, \qquad \bar{\nu}_1 + \nu_1 = \bar{\nu}_2 + \nu_2.$$

Daß daneben auch

$$(42)\qquad \bar{\lambda}_1 + \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 + \lambda_2$$

sein muß, erkennt man folgendermaßen. Falls es gelingt, die Transformationen zum Zyklus zusammenzuschließen, bilden P, P_1, $\bar{P}$, P_2 ein (i. allg.) windschiefes Viereck mit gleichen Gegenseiten. Die dadurch bedingte Gleichheit der Winkel bei P und $\bar{P}$ einerseits, bei P_1 und P_2 andrerseits liefert die beiden Gleichungen:

$$\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 + \bar{\nu}_1\bar{\nu}_2 = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2,$$
$$\bar{\lambda}_1\lambda_1 + \bar{\mu}_1\mu_1 + \bar{\nu}_1\nu_1 = \bar{\lambda}_2\lambda_2 + \bar{\mu}_2\mu_2 + \bar{\nu}_2\nu_2,$$

die, wie man leicht feststellt, im Verein mit (41) und den quadratischen Relationen auf (42) führen.

Infolge von (41), (42) lassen sich die beiden Tripel $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_2, \ldots$ mittels dreier neuer unbekannter Funktionen l, m, n darstellen:

$$(43)\qquad \bar{\lambda}_1 = l - \lambda_1, \qquad \bar{\mu}_1 = m - \mu_1, \qquad \bar{\nu}_1 = n - \nu_1,$$
$$(44)\qquad \bar{\lambda}_2 = l - \lambda_2, \qquad \bar{\mu}_2 = m - \mu_2, \qquad \bar{\nu}_2 = n - \nu_2.$$

Wir tragen diese Ausdrücke in die Differentialgleichungen (38), (39) ein:

$$(45)\qquad \begin{cases} \dfrac{dl}{ds} = rm - qn - 2(\lambda_1 l + \mu_1 m + \nu_1 n) + l^2 + h_1^2 - h_2^2, \\ \dfrac{dm}{ds} = -(r - \mu_1)\,l - \lambda_1 m + k_2 n + lm - (k_2 - k_1)\,\nu_1, \\ \dfrac{dn}{ds} = (q + \nu_1)\,l - k_2 m - \lambda_1 n + ln + (k_2 - k_1)\,\mu_1, \end{cases}$$

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{dl}{ds} = rm - qn - 2(\lambda_2 l + \mu_2 m + \nu_2 n) + l^2 + h_2^2 - h_1^2, \\ \dfrac{dm}{ds} = -(r - \mu_2)\,l - \lambda_2 m + k_1 n + lm + (k_2 - k_1)\,\nu_2, \\ \dfrac{dn}{ds} = (q + \nu_2)\,l - k_1 m - \lambda_2 n + ln - (k_2 - k_1)\,\mu_2. \end{cases}$$

Setzt man für die beiden Formelgruppen die entsprechenden rechten Seiten einander gleich, so ergeben sich drei lineare Gleichungen für l, m, n:

$$(47)\qquad \begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_1)\,l + (\mu_2 - \mu_1)\,m + (\nu_2 - \nu_1)\,n = h_1^2 - h_2^2, \\ (\mu_2 - \mu_1)\,l - (\lambda_2 - \lambda_1)\,m + (k_2 - k_1)\,n = -(k_2 - k_1)(\nu_1 + \nu_2), \\ (\nu_2 - \nu_1)\,l + (k_2 - k_1)\,m - (\lambda_2 - \lambda_1)\,n = (k_2 - k_1)(\mu_1 + \mu_2). \end{cases}$$

Durch Auflösen derselben erhält man:

$$(48)\qquad \begin{cases} l = \dfrac{1}{\Omega}\,[A\lambda_1 + B\lambda_2 + C(\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2)]\,, \\ m = \dfrac{1}{\Omega}\,[A\mu_1 + B\mu_2 + C(\nu_1\lambda_2 - \lambda_1\nu_2)]\,, \\ n = \dfrac{1}{\Omega}\,[A\nu_1 + B\nu_2 + C(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)]; \end{cases}$$

dabei ist:

$$(49)\quad \Omega = h_1^2 + h_2^2 + (k_2 - k_1)^2 - 2H, \qquad H = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2\,,$$

und die Konstanten A, B, C haben die Werte:

$$(50)\quad A = (k_2 - k_1)^2 + h_1^2 - h_2^2, \qquad B = (k_2 - k_1)^2 - h_1^2 + h_2^2, \qquad C = 2(k_2 - k_1)\,.$$

Werden nun die Ausdrücke (48) für l, m, n in das System (45) bzw. (46) eingesetzt, so reduzieren sich die drei Gleichungen auf Identitäten. Auf die Wiedergabe der etwas weitläufigen Rechnungen, die aber keine Schwierigkeiten bieten, darf verzichtet werden.

Es handelt sich noch darum, auch die quadratischen Relationen für $\bar\lambda_1, \ldots, \bar\lambda_2, \ldots$ zu verifizieren. Dazu fügen wir am besten zu den Gleichungen (47) noch eine vierte, ihrer Form nach der zweiten und dritten analoge hinzu, die sich durch Einsetzen der Ausdrücke (48) bestätigen läßt:

$$(k_2 - k_1)\,l - (\nu_2 - \nu_1)\,m - (\mu_2 - \mu_1)\,n = (k_2 - k_1)\,(\lambda_1 + \lambda_2)\,.$$

Die damit vorhandenen vier Gleichungen quadrieren und addieren wir. Es wird:

$$(51)\quad l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\Omega}\,[(h_2^2 - h_1^2)^2 + (k_2 - k_1)^2\,(h_1^2 + h_2^2 + 2H)]\,.$$

Eine zweite Hilfsformel leiten wir aus (48) direkt her:

$$(52)\qquad \lambda_1 l + \mu_1 m + \nu_1 n = \frac{1}{\Omega}\,(Ah_1^2 + BH)\,.$$

Wir bilden nun im Anschluß an (43):

$$\bar\lambda_1^2 + \bar\mu_1^2 + \bar\nu_1^2 = l^2 + m^2 + n^2 - 2(\lambda_1 l + \mu_1 m + \nu_1 n) + h_1^2\,.$$

Mittels (51), (52) verwandelt sich die rechte Seite tatsächlich in h_2^2. Entsprechend verifiziert man die Relation $\bar\lambda_2^2 + \bar\mu_2^2 + \bar\nu_2^2 = h_1^2$.

7. *Die vierte Kurve des Vertauschbarkeitssatzes.* — Zunächst ist zu bemerken, daß die vierte Kurve $(\bar P; \bar x)$ infolge der eindeutigen Bestimmung der zugehörigen Rotationen $\bar p = -c$, $\bar q = q + 2n$, $\bar r = r - 2m$ bereits ihrer Gestalt nach eindeutig bestimmt erscheint. Zu beweisen bleibt, daß der doppelte Weg nicht auf kongruente, sondern auf zusammenfallende Kurven führt.

Wir gehen von der *ersten* Formel (40) aus, ersetzen darin $\bar\lambda_1, \bar\mu_1, \bar\nu_1$ durch die gefundenen Ausdrücke [s. (43) und (48)] und bilden $X_1, X_1^{(1)}, X_1^{(2)}$ an Hand von (27) und (28), wobei in (28) $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, h_1, k_1$ zu schreiben ist. Nach einigen Reduktionen finden wir die folgende *Darstellung der vierten Kurve* $(\bar P; \bar x)$ *des Vertauschbarkeitssatzes*:

$$(53)\quad \begin{cases} \bar x = x + \dfrac{2}{[h_1^2 + (k_1 + c)^2]\,[h_2^2 + (k_2 + c)^2]\,\Omega}\{[\mathfrak{A}\lambda_1 + \mathfrak{B}\lambda_2 + \mathfrak{C}(\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2)]\,X \\ \quad + [\mathfrak{A}\mu_1 + \mathfrak{B}\mu_2 + \mathfrak{C}(\nu_1\lambda_2 - \lambda_1\nu_2)]\,X^{(1)} + [\mathfrak{A}\nu_1 + \mathfrak{B}\nu_2 + \mathfrak{C}(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)]\,X^{(2)}\}; \end{cases}$$

dabei gilt wieder (49), und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sind Konstanten mit den Werten:

$$(54)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = [h_1^2 + h_2^2 + (k_2 - k_1)^2]\,[h_2^2 + (k_2 + c)^2] - 2h_2^2[h_1^2 + (k_1 + c)^2]\,, \\ \mathfrak{B} = [h_1^2 + h_2^2 + (k_2 - k_1)^2]\,[h_1^2 + (k_1 + c)^2] - 2h_1^2[h_2^2 + (k_2 + c)^2]\,, \\ \mathfrak{C} = 2[h_2^2(k_1 + c) - h_1^2(k_2 + c) + (k_2 - k_1)\,(k_1 + c)\,(k_2 + c)]\,. \end{cases}$$

Wie man sieht, können in (53), (54) die Indizes 1 und 2 vertauscht werden. Danach besteht tatsächlich die in (40) geforderte Gleichheit [8]). Der viergliedrige Transformationszyklus ist also auch in geometrischer Hinsicht geschlossen, und zwar für jeden Wert der Konstanten c. Die Gesamtheit der vierten Kurven $(\bar{P}; \bar{x})$ ist wieder eine Klasse der von uns definierten Art. Im Falle [9]) $h_2 = h_1$, $k_2 = k_1$ wird $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$; $(\bar{P}; \bar{x})$ reduziert sich dann auf die Ausgangskurve $(P; x)$ [10]).

8. *Gelenkvierecke und Winkelrelation.* — Korrespondierende Punkte P, P_1, $\bar{P}$, P_2 der vier in der Beziehung des Vertauschbarkeitssatzes stehenden Kurven bilden ein räumliches Viereck mit konstanten, aber von c abhängigen Seiten, von denen die gegenüberliegenden paarweise gleich sind:

$$(55)\quad PP_1 = P_2\bar{P} = \frac{2h_1}{h_1^2 + (k_1 + c)^2}, \qquad PP_2 = P_1\bar{P} = \frac{2h_2}{h_2^2 + (k_2 + c)^2}.$$

Die beiden Winkel des Vierecks

$$\angle P_1PP_2 = \angle P_1\bar{P}P_2 = \omega, \qquad \angle PP_1\bar{P} = \angle PP_2\bar{P} = \omega',$$

gegeben durch

$$(56)\quad \begin{cases} \cos\omega = \dfrac{H}{h_1 h_2} = \dfrac{1}{h_1 h_2}(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2), \\ \cos\omega' = -\dfrac{1}{h_1 h_2}(\lambda_1\bar{\lambda}_1 + \mu_1\bar{\mu}_1 + \nu_1\bar{\nu}_1), \end{cases}$$

hängen von c nicht ab, d. h.: *Wird die ganze Klasse der Kurven $(P; x)$ zwei Transformationen $T(h_1, k_1)$, $T(h_2, k_2)$ simultan unterworfen, so sind die durch Anwendung des Vertauschbarkeitssatzes entstehenden räumlichen Gelenkvierecke, deren Ecken sämtlich Kurven mit gleicher Bogenlänge beschreiben, für die einzelnen Werte von c durch die Seitenpaare unterschieden, stimmen aber jeweils in den Winkeln überein.*

Wir zeigen, daß *die Winkel ω, ω' durch eine* (von c natürlich unabhängige) *Relation verbunden sind*, daß also die Bewegung des Gelenkvierecks in sich auf *einen* Freiheitsgrad beschränkt ist. Aus (56) erhalten wir nämlich mit Hilfe von (43) und (52) die Gleichung:

$$\frac{\cos\omega\cos\omega' + 1}{\cos\omega + \cos\omega'} = \frac{h_1^2 + h_2^2 + (k_2 - k_1)^2}{2h_1h_2},$$

die sich auf die folgende einfachere Form bringen läßt:

$$(57)\quad \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2} = \sqrt{\frac{(h_2 - h_1)^2 + (k_2 - k_1)^2}{(h_1 + h_2)^2 + (k_2 - k_1)^2}}.$$

Ein interessanter Sonderfall und zu gleicher Zeit eine anschauliche Deutung der Winkelrelation (57) ergibt sich aus der Annahme $\mathfrak{C} = 0$, die besagt, daß der Punkt $\bar{P}$ der vierten Kurve ständig in der durch P, P_1, P_2 bestimmten Ebene liegen soll. Man findet daraus für c die beiden stets reellen Werte:

$$(58)\quad c = \frac{1}{2(k_2 - k_1)}\left(h_1^2 - h_2^2 + k_1^2 - k_2^2 \pm \sqrt{[(h_1 + h_2)^2 + (k_2 - k_1)^2][(h_2 - h_1)^2 + (k_2 - k_1)^2]}\right)$$

---

[8]) Um sich davon zu überzeugen, daß damit auch das zu $(\bar{P}; \bar{x})$ gehörige Hilfsdreikant $(\bar{X}, \bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)})$ eindeutig festgelegt ist, braucht man nicht erst die Zusammensetzung der Drehungen ins Auge zu fassen. Man hat $\bar{X} = \frac{d\bar{x}}{ds}$, $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$; die Ableitungen von $\bar{X}$ bis zur zweiten bestimmen dann auch $\bar{X}^{(1)}$ und $\bar{X}^{(2)}$.

[9]) Man beachte, daß für h nur positive Werte in Betracht kommen.

[10]) Gleichzeitiges identisches Verschwinden von Ω im Nenner ist für reelle Transformationen durch die quadratischen Relationen ausgeschlossen.

und, wenn $k_2 = k_1$ ist (dabei also $h_2 \neq h_1$), den einzelnen Wert $c = -k_1$. Die Gelenkvierecke sind dann eben; sie stellen aber nicht Parallelogramme vor, sondern überschlagene Vierecke (in der Kinematik meist *gelenkige Antiparallelogramme* genannt). Wir beweisen nämlich, daß die Differenzen $\bar{x} - x, \ldots$ den Differenzen $x_2 - x_1, \ldots$ proportional sind, mithin $P\bar{P}$ und P_1P_2 parallel werden. Nach (53), (54) läuft das darauf hinaus, aus $\mathfrak{C} = 0$ die Relation

$$\mathfrak{A}[h_1^2 + (k_1 + c)^2] + \mathfrak{B}[h_2^2 + (k_2 + c)^2] = 0 \tag{59}$$

zu folgern (für $k_2 = k_1$ unmittelbar ersichtlich). Zu dem Ende verwandeln wir die Gleichung $\mathfrak{C} = 0$ in:

$$\frac{h_1^2 + (k_1 + c)^2}{h_2^2 + (k_2 + c)^2} = \frac{k_1 + c}{k_2 + c}$$

und damit die fragliche Gleichung (59) in:

$$\mathfrak{A}(k_1 + c) + \mathfrak{B}(k_2 + c) = 0. \tag{60}$$

Daß diese Beziehung tatsächlich besteht, erkennen wir, indem wir links für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Ausdrücke (54) einsetzen und noch einmal von $\mathfrak{C} = 0$ Gebrauch machen. Wir haben so den folgenden Zusatz zum Vertauschbarkeitssatz: *Liegt ein viergliedriger Zyklus von Transformationen $T(h_1, k_1)$, $T(h_2, k_2)$ vor, so kann man in der Klasse der ursprünglichen Kurven zwei Kurven (im Falle $k_2 = k_1$ eine einzige) derart wählen, daß die Gelenkvierecke überschlagene ebene Vierecke werden.* Ferner: *Die von den windschiefen Vierecken des Vertauschbarkeitssatzes erfüllte Winkelrelation ist gleichzeitig die eines überschlagenen ebenen Vierecks bei entsprechender Änderung der Seitenpaare* [11]).

Zur Erläuterung dieses letzten Punktes diene eine kleine ergänzende Betrachtung. Es seien $a, b (a > b)$ die beiden Stablängen eines überschlagenen ebenen Gelenkvierecks mit gleichen Gegenseiten, ω und ω' die beiden Winkel in den Gelenken, u und v die parallelen Verbindungslinien der Gegenecken (s. Fig.). Drückt man a und b mittels des Pythagoras durch u, v und die Höhe des Trapezes aus, so ergibt die Elimination der letzteren die als Grundlage des Hartschen Inversors wohlbekannte Beziehung:

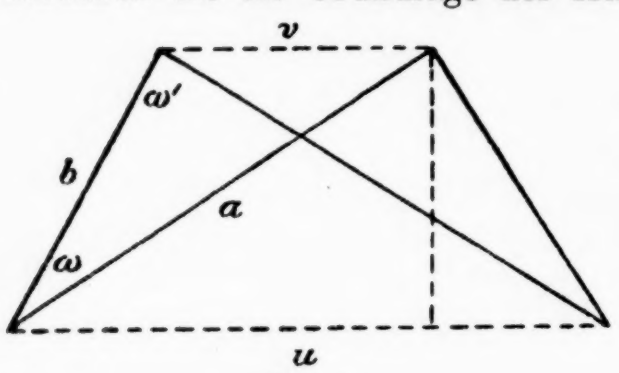


Fig. 1.

$$uv = a^2 - b^2.$$

Da ferner

$$u^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega', \qquad v^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega$$

wird, folgt

$$\frac{\cos\omega\cos\omega' + 1}{\cos\omega + \cos\omega'} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}, \quad \text{d. h.:}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2} = \frac{a - b}{a + b}. \tag{61}$$

Bildet man andererseits a und b mit Hilfe der beiden Formeln (55) für einen der durch (58) gegebenen speziellen Werte von c, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{a - b}{a + b} = \sqrt{\frac{(h_2 - h_1)^2 + (k_2 - k_1)^2}{(h_1 + h_2)^2 + (k_2 - k_1)^2}}.$$

Damit ist die Übereinstimmung von (61) und (57) unmittelbar gezeigt.

[11]) Diese Feststellung scheint bemerkenswert auch mit Rücksicht auf den Bianchischen Vertauschbarkeitssatz für die Bäcklundsche Transformation der pseudosphärischen Flächen, bei dem gleichfalls eine Winkelrelation von der Form (57) auftritt.

Eingegangen 27. Oktober 1932.

Über stetige Funktionen einer reellen Variablen, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen.

Von *P. J. Myrberg* in Helsinki.

Einleitung.

1. Es sei $\varphi(u)$ eine im Intervalle

I $$\alpha \leqq u \leqq \beta$$

eindeutige Funktion der reellen Variablen u. Man sagt, daß die Funktion $\varphi(u)$ in I ein algebraisches Additionstheorem besitzt, wenn sie einer Gleichung der Form

II $$G(\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u+v)) = 0,$$

wo G eine ganze rationale Funktion ihrer drei Argumente ist, genügt, sobald die drei Punkte u, v und $u+v$ dem genannten Intervalle angehören.

Vor einigen Jahren hat Ritt [1]) betreffs der stetigen Funktionen $\varphi(u)$ folgenden bemerkenswerten Satz bewiesen.

Jede stetige Funktion, welche ein algebraisches Additionstheorem in einem endlichen Intervalle besitzt, läßt sich aus endlich vielen analytischen Funktionen der Form

III $$\varphi_\nu(u) = \varphi_0(u + \tau_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

wo τ_ν Konstanten sind, zusammensetzen.

Anderseits hat Weierstraß [2]) in seinen Vorlesungen analytische Funktionen mit einem algebraischen Additionstheorem behandelt und bewiesen, daß jede solche Funktion algebraisch durch eine der Funktionen

IV $$u, \quad e^{mu}, \quad p(u)$$

ausgedrückt werden kann. In Verbindung mit dem Rittschen Satz folgt hieraus, daß *jede in einem endlichen Intervalle stetige Funktion mit einem algebraischen Additionstheorem aus endlich vielen analytischen Funktionen der Form* (III) *dargestellt werden kann, wo $\varphi_0(u)$ eine algebraische Funktion einer der Funktionen* (IV) *bezeichnet.*

Einen neuen, verallgemeinerungsfähigen Beweis der Rittschen Satzes hat kürzlich Montel [3]) gegeben.

2. Zweck der vorliegenden Arbeit ist, einen neuen, elementaren Beweis des Rittschen Satzes zu geben, der als eine direkte Verallgemeinerung des bekannten Beweises

---

[1]) J. F. Ritt, *Real functions with algebraic addition theorems* (Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 29 (1927)).

[2]) Beweise des Satzes von Weierstraß findet man u. a. in den folgenden Arbeiten:

E. Phragmén, *Sur un théorème concernant les fonctions elliptiques* (Acta mathematica, Bd. 7 (1885)).

P. Koebe, *Über diejenigen Funktionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen, und die endlich- vieldeutig umkehrbaren Abelschen Integrale* (Mathematische Abhandlungen H. A. Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet (1924)).

[3]) P. Montel, *Sur les fonctions d'une variable réelle qui admettent un théorème d'addition algébrique* (Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, XLVIII (1931)).

von Cauchy [4]) für das spezielle Additionstheorem

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

angesehen werden kann. Der Hauptgedanke unseres Beweises besteht im folgenden.

Wir denken uns die Gleichung (II) nach $\varphi(u + v)$ aufgelöst

V $$\varphi(u + v) = f(\varphi(u),\ \varphi(v))$$

und leiten hieraus die Gleichungen

$$\varphi(\overline{u + v} + w) = f(f(\varphi(u),\ \varphi(v)),\ \varphi(w)), \quad \varphi(u + \overline{v + w}) = f(\varphi(u), f(\varphi(v),\ \varphi(w))),$$

her, deren rechte Seiten bei unabhängigen Werten der Variablen u, v, w miteinander gleich sein sollen. Wenn $\varphi(u)$ nicht konstant ist, folgt hieraus leicht, daß die algebraische Funktion

VI $$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$$

bei geeigneter Wahl ihrer Zweige eine symmetrische Funktion der unabhängigen Variablen x, y und z sein muß. Anderseits folgt aus einem von Abel [5]) bewiesenen Satz, daß wenn (VI) symmetrisch ist, es dann analytische Funktionen gibt, welche dem Additionstheorem (V) genügen, ein Satz, der von Mineur [6]) und dem Verf.[7]) [8]) [9]) voneinander unabhängig auf Funktionensysteme übertragen worden ist. Es erübrigt dann noch, die Identität der stetigen Lösung $\varphi(u)$ mit einer analytischen Lösung nachzuweisen, um die Richtigkeit des Rittschen Satzes zu bestätigen.

Bemerkenswert ist, daß nach dem Vorhergehenden *jedes algebraische Additionstheorem, welches eine eindeutige Lösung besitzt, zugleich analytische Lösungen hat.*

Wir bemerken zum Abschluß, daß unsere Methode auch bei Systemen von Funktionen anwendbar ist, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen, wie in einer späteren Arbeit näher gezeigt wird. In Verbindung mit den allgemeinen, in unserer oben genannten Arbeit [7]) gegebenen Sätzen wird man dadurch zu dem Resultat geführt, daß alle stetigen Funktionen der betreffenden Art aus einer endlichen Anzahl analytischer Funktionen dargestellt werden können, welche algebraische Funktionen von Abelschen Funktionen bzw. deren Degenerierten sind.

I. Form des Additionstheorems.

3. Es sei $\varphi(u)$ eine im Intervalle

(1) $$\alpha \leqq u \leqq \beta \qquad (\alpha\beta \leqq 0)$$

stetige Funktion, welche dort ein algebraisches Additionstheorem

(2) $$G(\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u + v)) = 0$$

besitzt, wo G ein irreduzibles Polynom bezeichnet. Wir wollen zuerst mit Ritt und Montel zeigen, daß $\varphi(u)$ keinen Wert in unendlich vielen Punkten von (1) annehmen kann, wenn $\varphi(u)$ nicht konstant ist.

---

[4]) Vgl. E. Picard, *Leçons sur quelques équations fonctionnelles* (Cahiers scientifiques publiés sour la direction de M. Gaston Julia, fasc. III (1928)), S. 1.

[5]) N. H. Abel, *Recherche des fonctions de deux quantités variables indépendantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symmetrique de z, x et y* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. I (1826)).

[6]) H. Mineur, *Sur les fonctions ayant un théorème d'addition algébrique* (Bulletin des sciences mathématiques, t. XLVI (1922)).

[7]) P. J. Myrberg, *Über Systeme analytischer Funktionen, welche ein Additionstheorem besitzen* (Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig (1922)).

[8]) *Über das Additionstheorem analytischer Funktionen* (Annales academiae scientiarum fennicae, A, XIX (1923)).

[9]) *Sur les systèmes de fonctions qui admettent un théorème d'addition algébrique* (Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, t. 193 (1931)).

Wir nehmen zum Beweis indirekt an, es gelte die Gleichung

(3) $$\varphi(u) = x_0$$

für einen Wert x_0 in unendlich vielen Punkten von (1). Es sei c ein Häufungspunkt der Wurzeln von (3). Indem wir (vgl. Nr. 4)

(4) $$\varphi(u) \quad \text{durch} \quad \varphi(u + c) - \varphi(c)$$

ersetzen, können wir erreichen, daß $x_0 = c = 0$. Es sei dann

(5) $$h_1, h_2, h_3, \ldots$$

eine unendliche Folge gegen Null konvergierender Wurzeln der transformierten Gleichung (3), also

(3′) $$\varphi(u) = 0.$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß unendlich viele unter den Größen (5) positiv sind, weil der entgegengesetzte Fall in derselben Weise behandelt werden kann.

Wir betrachten ferner die Gleichung

(6) $$G(x, 0, z) = 0,$$

die wegen der Irreduzibilität von G nicht identisch bestehen kann. Es gibt dann nur endlich viele Werte von x:

(7) $$x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa,$$

für welche von z unabhängig $G(x_\nu, 0, z) = 0$ ist. Es seien dann u_1 und $u_2 > u_1$ irgend zwei Punkte, wo $\varphi(u)$ von (7) verschiedene Werte annimmt. Wir nehmen an, es sei $\varphi(u_2) \neq \varphi(u_1)$ und es sei u_0 die obere Grenze derjenigen Punkte auf dem Intervalle (u_1, u_2), wo $\varphi(u) = \varphi(u_1)$. Dann wäre somit

(8) $$\varphi(u_0 + \varepsilon) \neq \varphi(u_0) \quad \text{für} \quad 0 < \varepsilon \leqq u_2 - u_0.$$

Anderseits ergibt sich aus (2) für $u = u_0$, $v = h_n$, $u + v = u_0 + h_n$

$$G(\varphi(u_0),\ 0,\ \varphi(u_0 + h_n)) = 0,$$

woraus folgt, daß unendlich viele unter den Größen $\varphi(u_0 + h_n)$ miteinander gleich und somit, wegen der Stetigkeit von $\varphi(u)$, gleich $\varphi(u_0)$ sein müssen. Man hätte also für unendlich viele, gegen Null konvergierende positive Größen h_ν

(9) $$\varphi(u_0 + h_\nu) = \varphi(u_0),$$

was mit (8) im Widerspruch steht. Somit ist $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$, d. h. ist $\varphi(u) \neq x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ in einem Punkt u_1, so ist $\varphi(u)$ konstant und gleich $\varphi(u_1)$ auf dem Intervalle $(u_1 \leqq u \leqq \beta)$.

Offenbar ist die untere Grenze u' der Punkte u_1 gleich α. Wäre nämlich $u' > \alpha$, so wäre also $\varphi(u)$ in jedem Punkt des Intervalles (α, u') gleich einer der Größen (7) und somit konstant, was unmöglich ist, weil $\varphi(u') \neq x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa)$. Es ist somit $u' = \alpha$ und also $\varphi(u)$ konstant auf dem ganzen Intervalle (α, β), was unserer ursprünglichen Annahme widerspricht. Die im Anfang der Nr. 3 ausgesprochene Behauptung ist damit vollständig bewiesen.

Aus dem Obigen folgt insbesondere, daß $\varphi(u)$ in keinem Teilintervalle von (1) konstant sein kann.

4. Es sei nun c ein beliebiger Punkt des Intervalles (1). Wir führen die neue, für

(10) $$\alpha - c \leqq u \leqq \beta - c$$

stetige Funktion

(11) $$\psi(u) = \varphi(u + c) - \varphi(c)$$

ein, welche für $u = 0$ gleich Null wird. Diese Funktion hat ein algebraisches Additionstheorem, welches in folgender Weise gefunden werden kann.

Wir setzen $c = a + b$, wo a und b zum Intervall (1) gehören und erhalten aus (2) die Gleichungen

$$(12) \qquad G(\varphi(u+a), \quad \varphi(v+b), \quad \psi(u+v) + \varphi(c)) = 0,$$

$$G(\varphi(u+a), \ \varphi(b), \ \psi(u) + \varphi(c)) = 0, \ G(\varphi(a), \ \varphi(v+b), \ \psi(v) + \varphi(c)) = 0.$$

Durch Elimination der Größen $\varphi(u+a)$, $\varphi(v+b)$ ergibt sich hieraus das gesuchte Additionstheorem

$$(13) \qquad \bar{G}(\psi(u+v), \quad \psi(u), \quad \psi(v)) = 0$$

der Funktion $\psi(u)$.

Wir behaupten, daß im allgemeinen, d. h. wenn man eine endliche Anzahl der c-Werte ausschließt, die Gleichung

$$(14) \qquad \bar{G}(x, y, z) = 0$$

einen für $x = y = 0$ verschwindenden, regulären Funktionszweig $z = f(x, y)$ definiert.

Wir gehen zu diesem Zweck von der ersten Gleichung (12)

$$G(\varphi(u+a), \quad \varphi(v+b), \quad \psi(u+v) + \varphi(c)) = 0$$

aus, woraus

$$z - \varphi(c) = \psi(u+v)$$

als eine für

$$x = \varphi(a), \quad y = \varphi(b)$$

reguläre und verschwindende Funktion von $x = \varphi(u+a)$, $y = \varphi(v+b)$ erhalten wird, wenn

$$(15) \qquad G'_z(\varphi(a), \quad \varphi(b), \quad \varphi(c)) \neq 0.$$

Es sei

$$(16) \qquad H(x, z) = 0$$

die aus

$$G(x, y, z) = 0, \quad G'_z(x, y, z) = 0$$

durch Elimination von y gewonnene Gleichung, welche wegen der Irreduzibilität von G offenbar nicht identisch verschwinden kann. Es gibt dann nur endlich viele Werte von z, für welche H von x unabhängig verschwindet und diesen z-Werten entsprechen vermöge $\varphi(c) = z$ nach Nr. 3 nur endlich viele verschiedene c-Werte. Wird c von diesen Werten verschieden gewählt, so ist offenbar die Bedingung (15) erfüllt.

Wir können ferner $\varphi(u+a)$ und $\varphi(v+b)$ resp. aus den letzten Gleichungen (12)

$$G(\varphi(u+a), \quad \varphi(b), \quad \psi(u) + \varphi(c)) = 0, \quad G(\varphi(a), \quad \varphi(v+b), \quad \psi(v) + \varphi(c)) = 0$$

als für $\psi = 0$ reguläre analytische Funktionen bestimmen, wenn

$$G'_x(\varphi(a), \quad \varphi(b), \quad \varphi(c)) \neq 0, \quad G'_y(\varphi(u), \quad \varphi(b), \quad \varphi(c)) \neq 0,$$

welche letztere Bedingungen nur bei einer endlichen Wertmenge c aufhören zu gelten. Aus (12) wird somit $z = \psi(u+v)$ als eine für $x = y = 0$ reguläre und verschwindende Funktion der Größen $x = \psi(u)$, $y = \psi(v)$:

$$(17) \qquad z = f(x, y)$$

definiert, wenn man eine endliche Anzahl von c-Werten ausschließt, deren Gesamtheit im folgenden mit (c) bezeichnet wird.

5. Es sei nun

$$(18) \qquad |x| < \tau, \quad |y| < \tau$$

ein Gebiet, wo die Funktion $f(x, y)$ regulär bleibt. Wir wählen $|u|$ und $|v|$ so klein,

(19) $$|u| < \lambda, \quad |v| < \lambda,$$

daß die Punkte

$$x = \varphi(u), \quad y = \varphi(v)$$

zu (18) gehören. Dann hat man für die transformierte Funktion $\psi(u)$ das Additionstheorem

(20) $$\psi(u + v) = f(\psi(u), \psi(v)),$$

welches für (19) den Wert von $\psi(u + v)$ als eine eindeutige Funktion von $\psi(u)$, $\psi(v)$ definiert.

Wir bilden ferner durch Vertauschung der unabhängigen Variablen u, v die Gleichung

(21) $$\psi(v + u) = f(\psi(v), \psi(u)).$$

Aus der Gleichheit der rechten Seiten von (20) und (21) folgt offenbar, daß in den Variablen x und y identisch

(22) $$f(x, y) = f(y, x)$$

ist, sobald $\psi(u)$ nicht konstant ist und *zwar ohne daß die Stetigkeit der Funktion* $\psi(u)$ *vorausgesetzt wird.* Ferner ergibt sich aus

(23) $$\psi(u) = f(\psi(u), 0), \quad \psi(v) = f(0, \psi(v)),$$

daß

(24) $$f(x, 0) \equiv x, \quad f(0, y) \equiv y.$$

Nach dem Obigen hat die Funktion (17) im Nullpunkte eine Entwicklung der Form

(25) $$f(x, y) = x + y + xyf_1(x, y),$$

wo $f_1(x, y)$ eine symmetrische und für $x = y = 0$ reguläre Funktion bezeichnet.

Durch zweifache Anwendung des Additionstheorems (20) gelangt man zu den Gleichungen

(26) $$\psi(\overline{u + v} + w) = f(f(\psi(u), \psi(v)), \psi(w)), \quad \psi(u + \overline{v + w}) = f(\psi(u), f(\psi(v), \psi(w))).$$

Weil die rechten Seiten von (26) bei unabhängigen Werten von u, v, w gleich sein sollen, sobald

$$u, v, w, \quad u + v, \quad v + w, \quad u + w$$

absolut $< \lambda$ sind, muß offenbar

(27) $$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$$

identisch in den Variablen x, y, z gelten.

Die beiden Ausdrücke (27) sind somit symmetrische Funktionen von x, y, z, sobald (20) eine nichtkonstante, eindeutige Lösung besitzt.

Zweck der folgenden Betrachtungen ist nachzuweisen, daß das Additionstheorem (20) unter den obigen Bedingungen sogar analytische Lösungen besitzt.

6. Wir setzen mit Abel [1])

(28) $$v = f(y, z), \quad s = f(z, x)$$

und haben nach (22) und (27) identisch in den Variablen x, y und z

(29) $$f(x, v) = f(y, s).$$

Durch Differentiation in bezug auf z ergibt sich hieraus

$$\frac{\partial f(x, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial f(y, s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z}.$$

[1]) Vgl. die S. 108 unter 5) zitierte Arbeit.

Hieraus folgt für $z = 0$, wegen (24),

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} h(y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h(x), \tag{30}$$

wo

$$h(x) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_{y=0} = 1 + x f_1(x, 0) \tag{31}$$

gesetzt ist. Wir setzen ferner

$$\int_0^x \frac{dx}{h(x)} = u, \quad \int_0^y \frac{dy}{h(y)} = v \tag{32}$$

und erhalten für die Funktion

$$\bar{f}(u, v) = f(x(u), y(v)) \tag{33}$$

wegen (32) die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \frac{1}{h(x)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{1}{h(y)},$$

woraus folgt, daß

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}.$$

Somit ist (33) eine Funktion von $u + v$ allein:

$$\bar{f}(u, v) = f(x(u), y(v)) = g(u + v). \tag{34}$$

Für $v = 0$ ergibt sich hieraus wegen (24)

$$g(u) = x(u). \tag{35}$$

Mithin genügt die nach (31) und (32) für $u = 0$ reguläre analytische Funktion $g(u)$ dem Additionstheorem

$$g(u + v) = f(g(u), g(v)). \tag{36}$$

Es gilt somit der Satz:

Wenn das transformierte Additionstheorem (21) *in einem gewissen Intervall* $|u| < \lambda$ *eine eindeutige Lösung besitzt, so besitzt es zugleich analytische Lösungen. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß die für* $x = y = 0$ *als regulär vorausgesetzte Funktion* $f(x, y)$ *im Nullpunkt eine Darstellung der Form* (25) *besitzt und ferner, daß*

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$$

eine symmetrische Funktion von x, y *und* z *ist.*

Wir bemerken zum Abschluß, daß mit $g(u)$ auch $g(\varrho u)$ bei beliebigem Wert der Konstanten ϱ eine Lösung von (36) ist.

II. Zusammenhang zwischen den stetigen und analytischen Lösungen.

7. Wir knüpfen jetzt an den in der Einleitung zitierten Satz von Weierstraß an, wonach die Funktion $g(u)$ eine algebraische Funktion A einer der Funktionen

$$u, \quad e^{mu}, \quad f(u) \tag{37}$$

ist. Wir werden im folgenden die drei Fälle der Reihe nach behandeln.

Erster Fall. $g(u) = A(u)$.

Durch die algebraische Transformation

$$x = A(x')$$

geht (36) in das Additionstheorem

(38) $$\bar{g}(u+v) = \bar{g}(u) + \bar{g}(v)$$

der Funktion $\bar{g}(u) = u$ über. Nach Cauchy ist jede stetige Lösung von (38) von der Form

$$\bar{g}(u) = \varrho u,$$

also mit einer analytischen Lösung identisch. Im Hinblick auf die Relation III in der Einleitung, deren Herleitung in Nr. 12 wiedergegeben wird, folgt hieraus, daß jede stetige Lösung des gegebenen Additionstheorems aus endlich vielen algebraischen Funktionen zusammengesetzt werden kann.

Zweiter Fall. $g(u) = A(e^{mu})$.

Durch die algebraische Transformation $x = A(x')$ geht (36) in das Additionstheorem

(39) $$\bar{g}(u+v) = \bar{g}(u)\,\bar{g}(v)$$

der Funktion $\bar{g}(u) = e^u$ über. Jede stetige Lösung von (39) ist mit einer analytischen Lösung identisch, weil (39) in die Gleichung (38) transformiert wird, wenn $\bar{g}(u)$ durch $\log \bar{g}(u)$ ersetzt wird. Die Funktion $\varphi(u)$ setzt sich somit aus endlich vielen analytischen Funktionen der Form $A(e^{mu})$ zusammen.

8. *Dritter Fall.* $g(u) = A(p(u))$,

wo $p(u)$ die Weierstraßische p-Funktion bezeichnet. Dieser Fall erfordert eingehendere Untersuchungen.

Wir führen die algebraische Transformation $x = \dfrac{1}{A(x')}$ aus, wodurch (2) in das Additionstheorem der Funktion

$$q(u) = \frac{1}{p(\varrho u)}$$

übergeht, die wir statt $p(u)$ wählen wollen, weil sie im Nullpunkte regulär und gleich Null ist. Es sei

(40) $$G(\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u+v)) = 0$$

das gemeinsame Additionstheorem der Funktion $q(u)$ und der transformierten Funktion von $\varphi(u)$, die wir wieder mit $\varphi(u)$ bezeichnen werden. Ferner sei

$$\alpha' \leqq u \leqq \beta' \qquad (\alpha'\,\beta' \leqq 0) \qquad (\Delta)$$

dasjenige Intervall, wo (40) gültig ist. Zweck der folgenden Betrachtungen ist zu zeigen, daß die Funktionen

(41) $$\varphi(u), \quad q(u)$$

für einen geeigneten Wert der Konstanten ϱ mit einander wenigstens in einem den Nullpunkt enthaltenden Teilintervalle von Δ zusammenfallen.

Wir leiten zuerst aus (40) die irreduzible algebraische Gleichung her:

(42) $$G_n(\varphi(u_1),\ \varphi(u_2), \ldots,\ \varphi(u_n),\ \varphi(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)) = 0.$$

Für $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u$ ergibt sich hieraus für die Funktionen (41) das Multiplikationstheorem

(43) $$\bar{G}_n(\varphi(u),\ \varphi(nu)) = 0,$$

wo $\bar{G}_n(x, z) = G_n(x, x, \ldots, x, z)$ ein im allgemeinen reduzibles Polynom ist, welches in folgender Weise bestimmt werden kann.

Wir gehen von der Gleichung

(44) $$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$$

aus, wo $x_\nu = q(u_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Bei gegebenem Wert von x_ν hat u_ν die unendlich vielen Werte

$$\pm u_\nu' + \omega,$$

wo u_ν' einen beliebigen unter ihnen bezeichnet, und ω die Perioden von $q(u)$ durchläuft. Somit ist z gleich einer der Größen

$$z = q(u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n). \tag{45}$$

Hieraus folgt für $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u$, daß die Wurzeln der Gleichung

$$\bar{G}_n(x, z) = 0 \tag{46}$$

in der Form

$$z = q(ku) \qquad (k = n, n-2, n-4, \ldots)$$

darstellbar sind, wo $x = q(u)$.

Es sei nun

$$q(nu) = R_n(q(u)) \tag{47}$$

das rationale Multiplikationstheorem von $q(u)$. Nach dem Obigen ist

$$\varphi(nu) = R_k(\varphi(u)) \tag{48}$$

wo $k \leqq n$. Offenbar kann k sich nur in solchen Punkten ändern, wo $R_\mu(\varphi(u)) = R_\nu(\varphi(u))$ (μ und $\nu \leqq n$). Es gibt nach $N:3$ nur endlich viele solche Punkte u. Somit gibt es ein Intervall

$$|u| < \lambda_n, \tag{49}$$

wo k in (48) seinen Wert behält. Wir behaupten, daß für (49) $k = n$ ist.

Indem wir annehmen, unsere Behauptung sei richtig für $1, 2, \ldots, n-1$ (für $n = 1$ ist sie ja trivial), haben wir die Gleichungen

$$\varphi(ku) = R_k(\varphi(u)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

für $|u| < \lambda_k$. Wäre nun in (48) $k < n$ für (49), so erhielte man aus

$$\varphi(nu) = R_k(\varphi(u)) = \varphi(ku)$$

die Gleichungen

$$\varphi(u) = \varphi\left(\left(\frac{k}{n}\right)^\mu u\right) \quad \text{für } |u| \leqq n\lambda_n. \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Weil $\varphi(u)$ für $u = 0$ stetig und gleich Null ist, so wäre $\varphi(u) = 0$ für $|u| \leqq n\lambda_n$, was dem Resultat am Schlusse der Nr. 3 widerspricht. Somit ist $k = n$ für (49).

9. Wir bezeichnen zur Abschätzung der Größe λ_n mit Δ_n dasjenige Teilintervall von Δ, wo

$$\varphi(ku) = R_k(\varphi(u)). \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{50}$$

Ist Δ_n mit Δ identisch, so erübrigt nichts zu zeigen. Es sei somit Δ_n ein echter Teil von Δ und es sei u_1 ein Endpunkt von Δ_n, etwa der rechte, der zum Innern von Δ gehört. Dann ist offenbar

$$R_n(\varphi(u_1)) = R_\varkappa(\varphi(u_1)), \tag{51}$$

wo $\varkappa < n$. Es sei ferner u_1' der zum Nullpunkt nächste Punkt der komplexen Ebene, so daß

$$q(u_1') = \varphi(u_1).$$

Aus

$$q(nu_1') = R_n(q(u_1')) = R_n(\varphi(u_1)) = \varphi(nu_1)$$

und

$$q(\varkappa u_1') = R_\varkappa(q(u_1')) = R_\varkappa(\varphi(u_1)) = \varphi(nu_1)$$

ergibt sich dann

$$q(nu_1') = q(\varkappa u_1'),$$

woraus folgt, daß

$$nu_1' = \pm \varkappa u_1' + \omega \quad \text{und} \quad u_1' = \frac{\omega}{n \pm \varkappa},$$

wo ω eine Periode von q bezeichnet. Somit ist

$$|nu_1'| = \frac{n}{n \pm \varkappa} |\omega| \geqq \frac{1}{2} |\omega_0|, \tag{52}$$

wo ω_0 die absolut kleinste Periode von q bezeichnet.

Es sei nun m das von Null verschiedene Minimum von $q(u')$ auf $|u'| = \frac{1}{2}|\omega_0|$. Vermöge der Gleichung $\varphi(u) = q(u')$ wird die Strecke $0 \leqq u \leqq nu_1$ auf eine aus 0 gehende Kurve der u'-Ebene abgebildet, welche den Kreis $|u'| = \frac{1}{2}|\omega_0|$ wegen (52) schneiden muß, und auf welcher somit das Maximum von $|q(u')| \geqq m$ ist. Wenn somit σ so klein gewählt wird, daß

$$|\varphi(u)| < m \quad \text{für} \quad |u| < \sigma, \tag{53}$$

so muß $|nu_1| \geqq \sigma$ sein.

Aus dem Obigen geht hervor, daß in (48) $k = n$ sicher für

$$|u| \leqq \frac{\sigma}{n} \tag{54}$$

ist, wo σ eine von n unabhängige, von Null verschiedene Größe bezeichnet, d. h. es kann in (49) $\lambda_n = \frac{\sigma}{n}$ gesetzt werden.

10. Es sei nun u_0 ein Punkt des Intervalles (54) und u_0' ein Punkt, wo $q(u_0') = \varphi(u_0)$. Weil mit $\varphi(u)$ auch $\varphi(\varrho u)$ und $g(\varrho u)$ bei beliebigem Wert der Konstanten ϱ Lösungen der Gleichung (40) sind, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß

$$u_0 = u_0' = 1.$$

Wir leiten nun aus (50) für $u = \frac{1}{n}$ die Gleichung $R_n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \varphi(1)$ her. Weil die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$R_n(z) = \varphi(1)$$

durch

$$z = q\left(\frac{1}{n} + \frac{\omega}{n}\right)$$

gegeben sind, wo ω die mod. n absolut reduzierten Perioden von q durchläuft, so ist

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = q\left(\frac{1}{n} + \frac{\omega_n}{n}\right), \tag{55}$$

wo ω_n eine durch n bestimmte Periode von $q(u)$ bezeichnet. Wegen (50) folgt hieraus für $m \leqq n$

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = R_m\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right) = q\left(\frac{m}{n} + \frac{m}{n}\,\omega_n\right). \tag{56}$$

Zweck der folgenden Betrachtungen ist zu zeigen, daß stets $\omega_n = 0$ ist.

Aus (55) folgt zunächst, wegen $\varphi(0) = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} q\left(\frac{\omega_n}{n}\right) = 0 \tag{57}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_n}{n}=0. \tag{58}$$

Aus (56) ergibt sich dann für $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=t\leqq 1$

$$\varphi(t)=\lim_{n\to\infty}q\Big(t+\frac{m\,\omega_n}{n}\Big). \tag{59}$$

Wir wählen m so, daß

$$\frac{m}{n}=t+\frac{\vartheta_n}{n} \qquad |\vartheta_n|\leqq\frac{1}{2} \tag{60}$$

und haben nach (57) und (59)

$$t\,\omega_n=\omega_{n,t}+\varepsilon_{n,t} \tag{61}$$

wo $\omega_{n,t}$ eine von n und t abhängige Periode von $q(u)$ bezeichnet und

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to 0}}\varepsilon_{n,t}=0. \tag{62}$$

11. Es sei nun ω, ω' ein Paar primitiver Perioden von $q(u)$. Dann kann man schreiben

$$\omega_n=a_n\omega+b_n\omega',\quad \varepsilon_{n,t}=\gamma_{n,t}\omega+\gamma'_{n,t}\omega',\quad \omega_{n,t}=c_{n,t}\omega+d_{n,t}\omega', \tag{63}$$

wo die Koeffizienten in ω_n, $\omega_{n,t}$ ganze Zahlen sind, von denen a_n und b_n nur von n abhängen, und wo $\gamma_{n,t}$, $\gamma'_{n,t}$ mit $\varepsilon_{n,t}$ verschwindende reelle Größen bezeichnen. Aus (61) und (63) folgt

$$t(a_n\omega+b_n\omega')=c_{n,t}\omega+d_{n,t}\omega'+\gamma_{n,t}\omega+\gamma'_{n,t}\omega'$$

und daher, weil $\omega:\omega'$ nicht reell ist,

$$ta_n=c_{n,t}+\gamma_{n,t};\quad tb_n=d_{n,t}+\gamma'_{n,t}. \tag{64}$$

Wir wollen zuerst indirekt zeigen, daß die Anzahl der verschiedenen Perioden ω_n endlich ist.

Wäre die Anzahl der Perioden ω_n unendlich, so hätte man unendlich viele verschiedene ganze Zahlen a_n oder b_n. Es sei z. B. die Anzahl der erstgenannten Zahlen unendlich. Wir betrachten dann die aus (64) erhaltene Gleichung

$$t=\frac{c_{n,t}}{a_n}+\frac{\gamma_{n,t}}{a_n}. \tag{65}$$

Nach dem Obigen wäre es für jede gegebene kleine positive Zahl ε möglich, eine positive Größe t_ε und eine ganze Zahl n_ε so zu bestimmen, daß

$$|\gamma_{n,t}|<\varepsilon$$

für $|t|<t_\varepsilon$, $n>n_\varepsilon$. Anderseits findet man z. B. durch die Wahl $\varepsilon=\frac{1}{3}$, daß die Gleichung (65) für die Zahl $t=\frac{1}{2a_n}$ unmöglich ist. Durch diesen Widerspruch ist indirekt bewiesen worden, daß die Anzahl der verschiedenen Perioden ω_n endlich ist.

Aus (59) folgt nach dem Obigen, daß

$$\varphi(t)=q(\varrho_\nu t),$$

wo ϱ_ν nur endlich viele verschiedene Werte im Intervalle Δ annehmen kann. Weil nun die Konstanten ϱ_ν nur in solchen Punkten t ihren Wert ändern können, wo $q(\varrho_\mu t)=q(\varrho_\nu t)$ und also $\varrho_\mu t=\pm\varrho_\nu t+\omega$, wo ω eine Periode von $q(u)$ bezeichnet, so kann man Δ in endlich viele Teil derart zerlegen, daß $\varphi(u)$ in jedem Teilintervalle mit je einer analytischen Funktion $q(\varrho u)$ zusammenfällt.

12. Nach dem Vorhergehenden ist die stetige Funktion $\varphi(u)$ in der Nähe jedes Punktes, von den endlich vielen Punkten (c) abgesehen, mit je einer analytischen Funktion identisch. Hieraus folgt, daß die Funktion $\varphi(u)$ aus endlich vielen analytischen Funktionen zusammengesetzt werden kann, welche nur in den Punkten (c) ineinander übergehen können.

Es erübrigt noch, die Abhängigkeit der zu den verschiedenen Teilintervallen von (1) gehörigen analytischen Funktionen $\varphi_\nu(u)$ voneinander zu untersuchen.

Am einfachsten geschieht dies dadurch, daß wir aus (2) durch Differentiation die Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial x}\varphi'(u) + \frac{\partial G}{\partial z}\varphi'(u+v) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial y}\varphi'(v) + \frac{\partial G}{\partial z}\varphi'(u+v) = 0$$

herleiten und aus ihnen und aus (2) durch Elimination der Größen $\varphi(u+v)$, $\varphi'(u+v)$ eine Differentialgleichung der Form

$$H(\varphi(u), \quad \varphi'(u)) = 0 \tag{66}$$

bilden, wo H ein Polynom bezeichnet. Weil die allgemeine Lösung von (66) die Form

$$\varphi(u+\tau) \tag{67}$$

hat, wo τ eine unbestimmte Konstante bezeichnet, so muß offenbar jede Funktion $\varphi_\nu(u)$ einen Ausdruck der Form (67) haben und es ist somit

$$\varphi_\nu(u) = \varphi(u+\tau_\nu).$$

Damit ist der Rittsche Satz vollständig bewiesen.

III. Beispiele.

Lineare Gleichungen.

13. Wir gehen von der allgemeinen in bezug auf x und y symmetrischen Gleichung

$$G(x, y, z) = a_1xyz + a_2(x+y)z + a_3xy + a_4z + a_5(x+y) + a_6 = 0 \tag{68}$$

aus, die in bezug auf jede Variable linear ist. Es sei

$$x = \varphi(u), \quad y = \varphi(v), \quad z = \varphi(u+v)$$

eine stetige Lösung derselben. Wenn wir $\varphi(u)$ durch $\varphi(u) - \varphi(0)$ ersetzen, können wir erreichen, daß $\varphi(0) = 0$ und also

$$G(0, 0, 0) = a_6 = 0$$

Ferner hat man wegen

$$G(x, 0, x) \equiv 0 \tag{69}$$

die Gleichungen

$$a_2 = 0, \quad a_4 + a_5 = 0.$$

Durch Division mit dem von Null verschiedenen Koeffizient a_4 von z bekommt die Gleichung (68) nach z gelöst den Ausdruck

$$z = \frac{x + y + \alpha xy}{1 - \beta xy}. \tag{70}$$

Die Funktion (70) genügt bei beliebigen Werten der Koeffizienten α, β den Bedingungen der Nr. 6; denn es ist

$$f(f(x, y), z) = \frac{x + y + z + \alpha(xy + xz + yz) - \beta xyz}{1 - \beta(xy + xz + yz) - \alpha\beta xyz}$$

eine symmetrische Funktion von x, y und z.

14. Zur Bestimmung der allgemeinen stetigen Lösung von (68) bilden wir zuerst nach Nr. 6 die Funktion

$$h(x) = f'_y(x, y)_{y=0} = 1 + \alpha x + \beta x^2. \tag{71}$$

Aus (32) ergibt sich dann für die inverse Funktion von $\varphi(u)$ im allgemeinen der Ausdruck

$$u(x) = \int_0^x \frac{dx}{1 + \alpha x + \beta x^2} = \frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} \Big|_0^x \operatorname{arctg} \frac{2\beta x + \alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}},$$

woraus

$$x = \frac{A \operatorname{tg} u}{1 + B \operatorname{tg} u} \tag{72}$$

erhalten wird. In speziellen Fällen hat man die folgenden Ausdrücke.

Für $4\beta - \alpha^2 = 0$, $\beta \neq 0$ ist

$$u(x) = \frac{2\beta x}{2\beta x + \alpha}$$

und also

$$x = \frac{Au}{1 + Bu};$$

für $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ ist

$$u(x) = \frac{1}{\alpha} \ln (1 + \alpha x)$$

und also

$$x = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha u} - 1);$$

für $\alpha = \beta = 0$ ist

$$u(x) = x$$

und also

$$x = u.$$

Die allgemeine analytische Lösung der Gleichung (68) ist somit identisch mit einer der Funktionen

$$\frac{Au + B}{Cu + D}, \quad \frac{Ae^{\varrho u} + B}{Ce^{\varrho u} + D}. \tag{73}$$

Man konstatiert hier direkt, daß keine Werte (c) existieren. Daraus folgt, daß jede stetige Lösung von (68) mit einer analytischen Lösung im ganzen Intervalle (1) zusammenfällt.

Quadratische Gleichungen.

15. Wir beschränken uns im folgenden der Kürze halber auf solche Gleichungen, welche in bezug auf jede Variable x, y und z höchstens vom Grad zwei sind und deren Gesamtgrad zwei oder drei ist. Wenn man die Symmetrie der Gleichung in bezug auf x und y berücksichtigt, hat man für dieselbe den allgemeinen Ausdruck

$$G(x, y, z) = P_0(x, y)z^2 + P_1(x, y)z + P_2(x, y) = 0, \tag{74}$$

wo

$$\begin{aligned} &P_0(x, y) = a_1(x + y) + a_2, \; P_1(x, y) = a_3(x^2 + y^2) + a_4 xy + a_5(x + y) + a_6, \\ &P_2(x, y) = a_7(x^2 y + xy^2) + a_8(x^2 + y^2) + a_9 xy + a_{10}(x + y) + a_{11}. \end{aligned} \tag{75}$$

Indem man $\varphi(u)$ durch $\varphi(u) - \varphi(0)$ ersetzt, kann man erreichen, daß

$$G(0, 0, 0) = a_{11} = 0 .$$

Ferner folgt aus

$$G(x, 0, x) = (a_1 x + a_2) x^2 + (a_3 x^2 + a_5 x + a_6) x + a_8 x^2 + a_{10} x \equiv 0 ,$$

daß

$$a_1 + a_3 = 0, \quad a_2 + a_5 + a_8 = 0, \quad a_6 + a_{10} = 0 . \tag{76}$$

Somit bleiben noch nur 7 homogene Parameter übrig.

Wir schreiben ferner die Gleichung (74) noch in der Form

$$G(x, y, z) = Q_0(x, z)\, y^2 + Q_1(x, z)\, y + Q_2(x, z) , \tag{77}$$

wo

$$\begin{aligned} Q_0(x, z) &= a_3 z + a_7 x + a_8 , \\ Q_1(x, z) &= a_1 z^2 + a_4 xz + a_7 x^2 + a_5 z + a_9 x + a_{10} , \\ Q_2(x, z) &= a_1 xz^2 + a_3 x^2 z + a_2 z^2 + a_5 xz + a_8 x^2 + a_6 z + a_{10} x . \end{aligned} \tag{78}$$

Aus

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= P_0(x, y)\, t^2 + P_1(x, y)\, t + P_2(x, y) = 0 , \\ G(t, z, s) &= Q_0(z, s)\, t^2 + Q_1(z, s)\, t + Q_2(z, s) = 0 \end{aligned} \tag{79}$$

ergibt sich dann zur Bestimmung der Funktion

$$s = f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$$

die Gleichung vierten Grades von s:

$$\begin{aligned} H(x, y, z, s) = \{Q_0(z, s)\, P_1(x, y) - Q_1(z, s)\, P_0(x, y)\} \times \\ \{Q_1(z, s)\, P_2(x, y) - Q_2(z, s)\, P_1(x, y)\} - \{Q_0(z, s)\, P_2(x, y) - Q_2(z, s)\, P_0(x, y)\}^2 = 0 . \end{aligned} \tag{80}$$

Die Bedingung (27) ist offenbar äquivalent mit der Forderung, daß die fünf Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von s in (80) symmetrische Funktionen der Größen x, y und z sein sollen.

Die Aufstellung der fraglichen Bedingungen erfordert ziemlich lange Rechnungen, welche im folgenden in ihren Hauptzügen wiedergegeben werden.

16. Wird allgemein der Koeffizient von $x^\alpha y^\beta z^\gamma s^\delta$ in H mit $(\alpha, \beta, \gamma)^{(\delta)}$ bezeichnet, so muß also allgemein $(\alpha, \beta, \gamma)^{(\delta)}$ für jede Permutation der Größen α, β, γ ungeändert bleiben.

Aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(3, 1, 0)^{(4)} = - a_1^3 a_7, \qquad (0, 1, 3)^{(4)} = 0$$

und der Koeffizienten

$$(2, 2, 0)^{(4)} = - 2a_1^3 a_7, \qquad (0, 2, 2)^{(4)} = - a_1^4$$

folgt

$$a_1 = 0 ,$$

und dann aus (76)

$$a_3 = 0 .$$

Aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(4, 2, 2)^{(0)} = - a_7^4, \qquad (2, 2, 4)^{(0)} = 0$$

folgt jetzt

$$a_7 = 0 ,$$

und aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(4, 0, 0)^{(0)} = - a_8^4, \qquad (0, 0, 4)^{(0)} = - a_2^2 a_8^2 ,$$

$$a_8^4 = a_2^2 a_8^2 . \tag{81}$$

Wir unterscheiden zwei Hauptfälle, je nachdem $a_8 \neq 0$ oder $a_8 = 0$ ist.

Erster Hauptfall: $a_8 \neq 0$.

Aus (81) ergibt sich jetzt $a_2 = \pm a_8$. Wir unterscheiden zwei Fälle 1) und 2), je nachdem $a_2 = -a_8$ oder $a_2 = a_8$ ist.

1) *Fall.* $a_2 = -a_8$.

Wegen (76) ist

$$a_5 = 0\,.$$

Aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(1, 0, 0)^{(3)} = 0, \qquad (0, 0, 1)^{(3)} = a_2^2 a_4 a_6$$

folgt

$$a_2 a_4 a_6 = 0\,. \tag{82}$$

Wäre $a_2 = 0$, so wäre auch $a_8 = 0$ und die Gleichung (74) wäre in bezug auf jede Variable linear. Weil dieser Fall schon behandelt worden ist, können wir annehmen, daß $a_2 \neq 0$. Aus (82) folgt dann

$$a_4 a_6 = 0\,. \tag{83}$$

Wir unterscheiden zwei Unterfälle 1′) und 1″), je nachdem $a_4 \neq 0$ oder $a_4 = 0$ ist.

1′) *Unterfall.* $a_4 \neq 0$.

Wegen (76) und (83) ist $a_6 = a_{10} = 0$. Aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(3, 1, 1)^{(0)} = a_4 a_8^2 a_9, \qquad (1, 1, 3)^{(0)} = a_2 a_4 a_8 a_9$$

folgt

$$a_9 = 0\,.$$

Ferner folgt aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(3, 1, 1)^{(1)} = a_4^2 a_8^2 \qquad (1, 1, 3)^{(1)} = a_2 a_4^2 a_8$$

die Gleichung $a_2 = a_8$, welche mit der Annahme $a_2 = -a_8$ und $a_2 \neq 0$ im Widerspruch steht. Der Unterfall 1′) ist somit unmöglich.

1″) *Unterfall*: $a_4 = 0$.

Aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(3, 0, 0)^{(0)} = -2a_8^3 a_{10}, \qquad (0, 0, 3)^{(0)} = a_2 a_6 a_8 a_9 - 2a_2^2 a_8 a_{10}$$

folgt jetzt

$$a_6 a_9 = 0. \tag{84}$$

Wäre $a_9 \neq 0$, so folgte aus (84) $a_6 = 0$ und dann aus (76) $a_{10} = 0$. Weil aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(3, 1, 0)^{(0)} = -2a_8^3 a_9, \qquad (0, 1, 3)^{(0)} = 0$$

ein Widerspruch erhalten wird, so muß

$$a_9 = 0.$$

sein. Die einzigen im allgemeinen von Null verschiedenen Koeffizienten a sind hier

$$a_2, \quad a_6, \quad a_8 = -a_2, \quad a_{10} = -a_6.$$

Weil jedenfalls $a_2 \neq 0$, so können wir in der Gleichung (74) durch a_2 dividieren und somit $a_2 = -a_8 = 1$ setzen. Somit wird die Gleichung

$$z^2 + \varkappa z - (x^2 + y^2) - \varkappa(x + y) = 0,$$

wo $\varkappa = a_6$, erhalten, welche wirklich unseren Bedingungen genügt.

2) *Fall*: $a_2 = a_8$.

Wegen (76) ist jetzt

$$a_5 = -2a_2.$$

Ferner folgt aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(3, 0, 0)^{(0)} = a_5 a_8^2 a_{10} - 2a_8^3 a_{10}, \qquad (0, 0, 3)^{(3)} = a_2 a_6 a_8 a_9 - 2a_2^2 a_8 a_{10}$$

die Gleichung

$$a_{10}(2a_2 - a_9) = 0.$$

Wäre $a_{10} \neq 0$ und also $a_9 = 2a_2$, so folgte aus der Gleichheit der Koeffizienten

(85) $$(1, 1, 2)^{(2)} = -a_2 a_4^2 a_9 + a_2 a_4^2 a_5, \qquad (2, 1, 1)^{(2)} = 0$$

zuerst $a_4 = 0$ und dann, aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(1, 2, 0)^{(1)} = a_5^2 a_8^2, \quad (1, 0, 2)^{(1)} = a_2 a_5^2 (a_8 + a_9)$$

die Gleichung $a_2 = 0$, was wegen $a_2 = a_8 \neq 0$ unmöglich ist. Somit muß $a_{10} = 0$ sein. Aus (76) folgt dann $a_6 = 0$ und aus (85) $a_9 = a_5$. Die im allgemeinen von Null verschiedenen Koeffizienten sind jetzt

$$a_2, \quad a_4, \quad a_5 = -2a_2, \qquad a_8 = a_2, \qquad a_9 = -2a_2.$$

Weil $a_2 \neq 0$, kann man $a_2 = 1$ setzen, wodurch

$$a_2 = 1, \quad a_4 = \varkappa, \quad a_5 = -2, \quad a_8 = 1, \quad a_9 = -2$$

erhalten wird. Die zugehörige Gleichung

(86) $$\varkappa xyz + x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz - 2xy = 0$$

genügt unseren Bedingungen.

Zweiter Hauptfall: $a_8 = 0$.

17. Es ist jetzt $a_2 \neq 0$, weil die Gleichung (74) sonst linear wäre. Wegen (76) ist $a_5 = -a_2$. Ferner folgt aus der Gleichheit der Koeffizienten (85) die Gleichung

(87) $$a_4^2(a_5 - a_9) = 0.$$

Wäre $a_4 = 0$, so folgte aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(2, 0, 0)^{(2)} = 0, \quad (0, 0, 2)^{(2)} = -a_2^2 a_5^2,$$

daß $a_2 a_5 = 0$, was mit dem Obigen im Widerspruch steht. Aus $a_4 \neq 0$ und (87) ergibt sich aber

$$a_5 = a_9$$

und dann aus der Gleichheit der Koeffizienten

$$(2, 1, 0)^{(2)} = 0, \quad (1, 0, 2)^{(2)} = -a_2 a_4^2 a_{10} + a_2 a_4 a_5^2$$

die Gleichung

$$a_4 a_{10} = a_5^2.$$

Wir können $a_4 = 1$ wählen, woraus folgt, daß $a_{10} = a_5^2$. Die im allgemeinen von Null verschiedenen Koeffizienten a sind jetzt

$$a_2, \ a_4 = 1, \quad a_5 = -a_2, \quad a_6 = -a_2^2, \quad a_9 = -a_2, \quad a_{10} = a_2^2.$$

Weil aber die zugehörige Gleichung

$$\begin{aligned} &xyz + a_2 z^2 - a_2(x + y)z - a_2^2 z - a_2 xy + a_2^2(x + y) \\ &\equiv (z - a_2)(xy - a_2 x - a_2 y + a_2 z) = 0 \end{aligned}$$

reduzibel ist, werden wir sie beiseite lassen.

Schlußresultat: *Die einzigen quadratischen Gleichungen zweiten und dritten Grades sind die Gleichungen*

(88)
$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad z^2 - x^2 - y^2 + \varkappa(z - x - y) = 0, \\ &\text{II.} \quad \varkappa xyz + x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0. \end{aligned}$$

18. Es erübrigt sich, die stetigen Lösungen dieser Gleichungen zu bestimmen.

I. *Gleichung.*

Für $\varkappa \neq 0$ ergibt sich, nach (31) und (32),

$$h(x) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=0} = \pm \frac{\varkappa}{2x + \varkappa}$$

und

$$u(x) = \pm \int_0^x \frac{2x + \varkappa}{\varkappa}\, dx = \pm \left(\frac{x^2}{\varkappa} + x\right).$$

woraus

$$x = -\frac{\varkappa}{2} \pm \sqrt{\frac{\varkappa^2}{4} + u}$$

erhalten wird. Die allgemeine analytische Lösung der ursprünglichen Gleichung hat somit die Form

$$x = \sqrt{A + Bu} + C. \tag{89}$$

Für $\varkappa = 0$ findet man unmittelbar für (I.) die allgemeine Lösung

$$x = \sqrt{Bu} + C,$$

welche auch in (89) enthalten ist. Weil hier keine Ausnahmewerte (c) vorhanden sind, wie man durch direkte Rechnung leicht finden kann, so gibt (89) zugleich die allgemeine stetige Lösung der Gleichungen vom Typus I.

II. *Gleichung.*

Die Methode der $N : 6$ ist hier bei der Bestimmung der Funktion $\varphi(u)$ nicht anwendbar, weil der Nullpunkt ein singulärer Punkt der Gleichung (II.) ist. Werden aber in (II). die Reihenentwicklungen

$$x = \varphi(u), \quad y = \varphi(v) = \frac{\varphi'(0)}{1!}\, v + \frac{\varphi''(0)}{2!}\, v^2 + \cdots$$

$$z = \varphi(u + v) = \varphi(u) + \frac{\varphi'(u)}{1!}\, v + \frac{\varphi''(u)}{2!}\, v^2 + \cdots$$

eingeführt, so gelangt man durch Vergleichung der Koeffizienten von v^2 zur Differentialgleichung

$$\varphi'^2(u) = 2\varphi(u)\, \varphi''(0) - \frac{\varkappa}{2}\, \varphi^2(u) \varphi''(0),$$

welche für $\varkappa \neq 0$ die Lösung

$$\varphi(u) = \frac{2}{\varkappa} \sin^2 u$$

und für $\varkappa = 0$ die Lösung

$$\varphi(u) = u^2$$

besitzt. Somit ist die allgemeine analytische Lösung der Gleichungen des Typus II:

$$x = A \cos \varrho u + B, \qquad x = Au^2 + B,$$

und diese Ausdrücke stellen zugleich die allgemeinen stetigen Lösungen der betreffenden Gleichungen dar.

Eingegangen 31. Oktober 1932.

Eine geometrische Konstruktion der transfiniten Zahlen Cantors.

Von *Gerhard Haenzel* in Karlsruhe.

Georg Cantor schied bei der Begründung der Mengenlehre das Potential-Unendliche vom Aktual-Unendlichen. Dem Aktual-Unendlichen in der Mengenlehre, insbesondere den transfiniten Zahlen, schrieb er einerseits *immanente* Realität zu, insofern, als die transfiniten Zahlen „auf Grund von Definitionen in unserem Verstande einen ganz bestimmten Platz einnehmen, von allen übrigen Bestandteilen unseres Denkens aufs beste unterschieden werden, zu ihnen in bestimmter Beziehung stehen und somit die Substanz unseres Geistes in bestimmter Weise modifizieren“ [1]).

Ebenso aber behauptete Cantor die *transiente* Realität seiner transfiniten Zahlen insofern, als diese „für einen Ausdruck oder ein Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der dem Intellekt gegenüberstehenden Außenwelt gehalten werden müssen, als ferner die verschiedenen Zahlenklassen ... Repräsentanten von Mächtigkeiten sind, die in der körperlichen und geistigen Natur tatsächlich vorkommen“[1]).

Die Ableitung der transfiniten *Ordnungs*zahlen gründet sich in der Mengenlehre auf die Theorie der wohlgeordneten Mengen, das sukzessive Bildungsgesetz ruht auf dem Satz [2]):

„Kommt in der gegebenen Menge M von Ordnungszahlen gleichzeitig mit irgendeiner Ordnungszahl α aus M auch jede kleinere Ordnungszahl als α vor, so ist die nach der Größe der Ordnungszahlen geordnete Menge M wohlgeordnet. Die zur wohlgeordneten Menge M gehörige Ordnungszahl μ ist die auf alle Ordnungszahlen von M nächstfolgende Ordnungszahl, und so geht aus allen jeweils bekannten Ordnungszahlen durch ihre Anordnung zu einer wohlgeordneten Menge die nächsthöhere Zahl eindeutig hervor“.

Auf diese Weise ergab sich die Folge aller ganzen Zahlen der Zahlenklassen I und II, wenn unter ω die kleinste transfinite Zahl und erste Zahl der Klasse II verstanden wird:

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{array}{l} 0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots \omega, \ \omega+1, \ \omega+2, \ldots, \omega+\nu, \ldots \omega 2, \ \omega 2+1, \ldots \omega 3, \ \ldots \omega\nu, \ \ldots \omega^2, \\ \omega^2+1, \ldots, \omega^2+\nu, \ldots \omega^2+\omega, \ \omega^2+\omega+1, \ldots \omega^2+\omega\nu, \ \omega^2+\omega\nu+1, \ldots \omega^3, \ \omega^3+1, \ldots \\ \ldots (\nu_n\omega^n+\nu_{n-1}\omega^{n-1}+\cdots+\nu_1\omega+\nu_0), \ldots \omega^\omega, \ \omega^\omega+1, \ldots \omega^{\omega+1}, \ldots \omega^{\omega^n}, \ldots \omega^{\omega^\omega}=\varepsilon, \ \varepsilon+1, \ldots \end{array}\right\}$$

ν_i sind endliche ganze Zahlen.

In den Originalarbeiten Cantors steht methodisch das konstruktive Denken im Vordergrunde, und das sukzessive Bildungsgesetz der Ordnungszahlen erscheint dort in zwei Schritte aufgelöst, die beiden Cantorschen *Erzeugungsprinzipe* [3]) genannt:

---

[1]) G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, § 8, Math. Annalen **21** (1883).

[2]) A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, § 12, 3. Aufl. 1928.

[3]) G. Cantor, Grundlagen einer allg. Mannigfaltigkeitslehre, § 11, 12, Math. Annalen **21** (1883). — Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre § 15, Math. Annalen **46** (1895), **49** (1897).

Das *erste* Erzeugungsprinzip besteht in der Bildung neuer natürlicher Zahlen durch Hinzufügung der Einheit zu schon gegebenen ganzen (endlichen oder transfiniten) Zahlen. Das *zweite* schafft aus einer wohldefinierten Fundamentalreihe von Ordnungszahlen, unter denen keine größte existiert, eine neue transfinite Ordnungszahl als Grenzzahl der Fundamentalreihe, definiert als die allen Zahlen der Reihe nächstfolgende größere Zahl.

Die Fusion der beiden Erzeugungsprinzipe im sukzessiven Bildungsgesetz der Ordnungszahlen, gegründet auf die Theorie der wohlgeordneten Mengen, kommt in der Existenz der beiden verschiedenen Arten transfiniter Ordnungszahlen zum Ausdruck: Die transfinite Ordnungszahl *erster* Art hat in der wohlgeordneten Zahlenreihe ein bestimmtes ihr unmittelbar vorangehendes Element, die transfinite Ordnungszahl *zweiter* Art hat ein solches Element nicht.

Die Ableitung der transfiniten Zahlen durch die Mengenlehre rief Widerspruch hervor, der sich auf die Antinomien der Mengenlehre stützte. Die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten suchte der Intuitionismus zu beseitigen. Während der Wohlordnungssatz keinen konstruktiven sondern rein existentialen Charakter besitzt, geht der Intuitionismus von der Grundthese Brouwers aus, daß unter mathematischer Existenz die Konstruierbarkeit zu verstehen sei, daß es aber nicht angehe, die Existenz als bloße Widerspruchsfreiheit zu deuten.

Im folgenden wird zwar die Bekanntschaft mit der Cantorschen Mengenlehre (zu Vergleichszwecken) vorausgesetzt; jedoch besteht das Ziel *in einer neuen Definition der transfiniten Ordnungszahlen mit Hilfe einer geometrischen Konstruktion unabhängig von der mengentheoretischen Begründung. Dabei wird von dem Grundsatze ausgegangen: Existenz gleich geometrischer Konstruierbarkeit.*

1. Die Axiome der ebenen Geometrie seien in folgende drei Gruppen geordnet [4]):

I. Die projektiven Axiome. Sie bilden die Grundlagen der projektiven Geometrie.

II. Die Kongruenzaxiome. Sie bilden zusammen mit Gruppe I die Basis für die absolute (euklidische und nichteuklidische) Geometrie.

III. Das Ähnlichkeitsaxiom, dessen Hinzuziehung zu I und II die euklidische Geometrie bedingt.

Auf Grund der projektiven Axiome sind die beiden Operationen des Projizierens und Schneidens ausführbar, d. h. es lassen sich die Schnittpunkte einer Geraden mit anderen Geraden aufsuchen, und es lassen sich die Projektionsstrahlen aus einem gegebenen Punkte nach anderen Punkten ziehen. Die Hinzufügung der Kongruenzaxiome zieht die Grundoperation des Abtragens von Strecken nach sich, d. h. es lassen sich von einem gegebenen Punkte aus auf allen durch ihn gehenden Geraden Segmente gegebener Länge abtragen. Die Einführung des Ähnlichkeitsaxioms ermöglicht die ähnliche Abbildung von Strecken und ebenen Figuren innerhalb der euklidischen Geometrie. Die genannten Operationen sollen die „Grundoperationen" heißen.

Definition: Geometrische „*Grundkonstruktionen*" sind diejenigen Operationen, die aus einer endlichen Anzahl von Grundoperationen bestehen. Kommen allein die Grundoperationen des Projizierens und Schneidens zur Anwendung, so heißt die Grundkonstruktion *projektiv*, bei Hinzuziehung des Streckenabtragens dagegen *absolut*.

2. In der gegebenen Ebene ε liege die gerichtete Strecke $\overrightarrow{01}$ auf der Gerade g innerhalb des durch die Punkte ω und ω^* begrenzten Segmentes (Fig.), und zwar weise die Richtung $\overrightarrow{01}$ von 0 nach ω. Aus dem Projektionszentrum Z_I außerhalb von g werden

[4]) H. Mohrmann, Einführung in die Nicht-Euklidische Geometrie, Leipzig 1930.

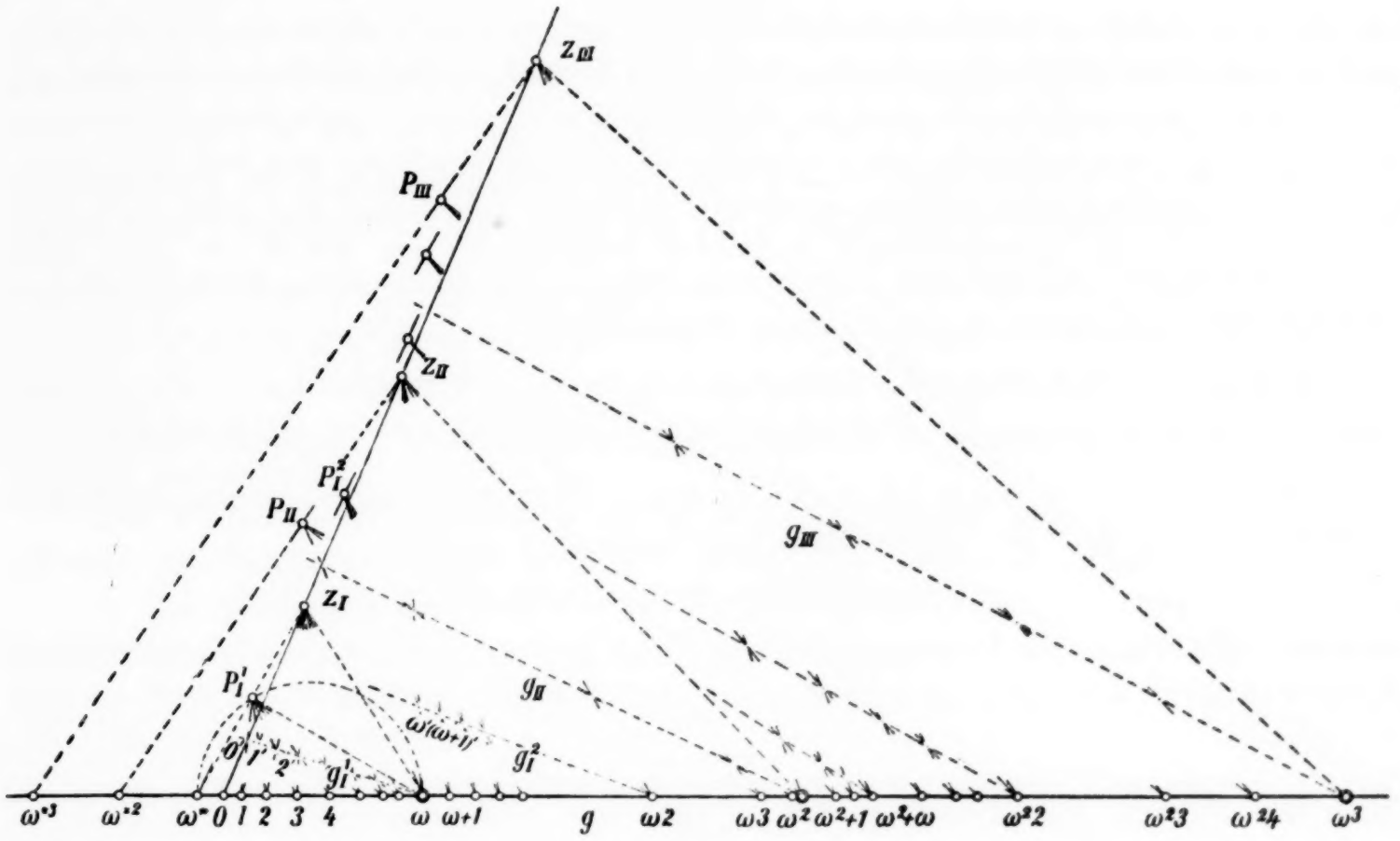


Fig. 1.

die Punkte $\omega^*, 0, 1, \omega$ durch Strahlen angeschnitten. Auf dem Strahle $Z_I\omega^*$ befindet sich das „Additionszentrum“ P_I^1. Die Gerade $P_I^1 1$ schneidet $Z_I 0$ in $0'$. Die „Additionsgerade“ $\omega 0' = g_I^1$ wird von $Z_I 1$ in $1'$ getroffen; der Strahl $P_I^1 1'$ schneidet auf g den Punkt 2 aus; der Projektionsstrahl $Z_I 2$ trifft die Additionsgerade g_I^1 in $2'$, der Strahl $P_I^1 2'$ bestimmt auf g den Punkt 3 u. s. f. Auf diese Weise entsteht aus der Strecke $\overrightarrow{01}$ auf g mittels des Projektionszentrums und des Additionszentrums die gegen den Grenzpunkt ω konvergierende Punktefolge:

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots.$$

Sind die Punkte der Folge bis zur Nummer n bekannt, so ist $Z_I n$ mit der Additionsgeraden g_I^1 in n' zu schneiden; der Strahl $P_I^1 n'$ bestimmt dann auf g den nächsten Punkt $n+1$ der Folge. Dabei bilden zwei gegebene benachbarte Punkte mit ω und ω^* ein konstantes Doppelverhältnis:

$$(0\,1\;\omega\,\omega^*) = (1\,2\;\omega\,\omega^*) = \cdots = (\nu\;\;(\nu+1)\;\;\omega\;\;\omega^*).$$

Auf g werden nunmehr in der Richtung $\overrightarrow{01}$ jenseits ω zwei neue Punkte $\omega+1$, $\omega 2$ gewählt unter der Bedingung:

$$[\omega\;\;(\omega+1)\;\;\omega 2\;\;\omega^*] = [0\,1\;\omega\,\omega^*],$$

was auf eine projektive Transformation der Geraden g in sich selbst hinausläuft. Dazu soll ein neues Projektionszentrum Z_{II} auf $0Z_I$ jenseits Z_I und die neue Additionsgerade g_I^2 gehören. Letztere schneidet die beiden Projektionsstrahlen $Z_{II}\omega$ und $Z_{II}(\omega+1)$ bzw. in ω' und $(\omega+1)'$. Die Verbindungsgerade von $(\omega+1)$ mit ω' bestimmt auf $Z_{II}\omega^*$ das neue Additionszentrum P_I^2. Nun setzt der vorhin beschriebene Konstruktionsprozeß ausgehend von ω und $\omega+1$ mit dem Projektionszentrum Z_{II} und dem Additionszentrum P_I^2 die Folge der Punkte gegen $\omega 2$ hin weiter fort. Es entsteht die gegen den Grenzpunkt $\omega 2$ konvergierende Punktefolge:

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \nu, \ldots,$$

und es besteht innerhalb der gesamten Folge die Gleichungskette der Doppelverhältnisse:

$$[0\,1\,\omega\,\omega^*] = [\omega\ \ (\omega+1)\ \ \omega 2\ \ \omega^*] = [(\omega+1)\ \ (\omega+2)\ \ \omega 2\ \ \omega^*] = \cdots.$$

Es versteht sich von selbst, daß beliebig viele solcher Punktefolgen in der beschriebenen Weise aneinander gereiht werden können und daß die gesamte entstehende Punktemenge in der Richtung $\overrightarrow{01}$ unbegrenzter Erweiterung fähig ist. Jedoch werden die beiden bisher konstruierten aneinander anschließenden Teilskalen:

(II) $$0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \nu, \ldots$$

von vornherein folgendermaßen in eine „übergeordnete Skala" eingeschachtelt:

Zwei neue Grenzpunkte ω^2 in der Richtung $\overrightarrow{01}$ und ω^{*2} in der Richtung $\overrightarrow{10}$ sind so angenommen, daß die Doppelverhältnisgleichung:

$$[0\,\omega\,\omega^{*2}\,\omega^2] = [\omega\ \ \omega 2\ \ \omega^{*2}\ \ \omega^2]$$

besteht. Mit Hilfe des Projektionszentrums Z_{II} und des Additionszentrums P_{II} (auf $Z_{II}\omega^{*2}$) entsteht die gegen ω^2 konvergierende übergeordnete Skala:

(III) $$0, \omega, \omega 2, \omega 3, \ldots, \omega\nu, \ldots.$$

Auch hier gilt die Gleichungskette der Doppelverhältnisse:

$$[0\,\omega\,\omega^2\,\omega^{*2}] = [\omega\ \ \omega 2\ \ \omega^2\ \ \omega^{*2}] = \cdots = [\omega\nu\ \ \omega(\nu+1)\ \ \omega^2\ \ \omega^{*2}].$$

Die beiden aufeinander folgenden Segmente $\overrightarrow{0\omega}$ und $\overrightarrow{\omega\,\omega 2}$ dieser Skala enthalten bzw. die beiden vorhin konstruierten aneinander anschließenden Punktefolgen (II). In derselben Weise liegt jetzt zwischen zwei gegebenen aufeinander folgenden Punkten $\omega\nu$ und $\omega(\nu+1)$ von (III) eine Punktefolge von der Form:

$$\omega\nu,\ \omega\nu + 1,\ \omega\nu + 2, \ldots, \omega\nu + \mu, \ldots \omega(\nu + 1).$$

Für alle solche eingeschachtelten Teilfolgen dient Z_{II} als Projektionszentrum; die zugehörigen Additionszentren $P_I^2, P_I^3, P_I^4, \ldots$ liegen auf $Z_{II}\omega^*$.

Nach Konstruktion der bisher erhaltenen Punktefolge:

$$0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots \omega, \omega + 1, \ldots \omega 2, \omega 2 + 1, \omega 2 + 2, \ldots, \omega 2 + \nu, \ldots \omega 3, \ldots \omega 4, \ldots \omega\nu, \ldots \omega^2$$

kann auch dieser eine neue Punktefolge übergeordnet werden mit dem Projektionszentrum Z_{III} und dem Additionszentrum P_{III}, nämlich die Folge:

(IV) $$0,\ \omega^2,\ \omega^2 2,\ \omega^2 3, \ldots, \omega^2\nu, \ldots \omega^3.$$

Zwischen zwei gegebenen aufeinander folgenden Punkten $\omega^2\nu$ und $\omega^2(\nu+1)$ dieser Folge (IV) liegt eine Skala von der Form:

(IV a) $$\omega^2\nu,\ \omega^2\nu + \omega,\ \omega^2\nu + \omega 2, \ldots, \omega^2\nu + \omega\mu, \ldots \omega^2(\nu + 1).$$

Ihr Projektionszentrum ist Z_{III}, ihr Additionszentrum liegt auf der Geraden $Z_{III}\omega^{*2}$. Zwei aufeinander folgende Punkte von (IV a), z. B. $\omega^2\nu$ und $\omega^2\nu + \omega$, schließen ihrerseits wieder eine Punktefolge ein von der Form:

(IV b) $$\omega^2\nu,\ \omega^2\nu + 1,\ \omega^2\nu + 2, \ldots \omega^2\nu + \mu, \ldots \omega^2\nu + \omega.$$

Die durch den bisherigen Konstruktionsprozeß gewonnene Punktefolge läßt sich auch über ω^3 hinaus unbegrenzt erweitern, und das gesetzmäßige Konstruktionsverfahren wird niemals eine letzte Schranke finden. Auf diese Weise entsteht auf g die Punktereihe:

(V)
$$\begin{cases} 0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \nu, \ldots \omega 2, \omega 2 + 1, \ldots \omega 3, \ldots \omega\nu, \ldots \omega^2, \\ \omega^2 + 1, \ldots, \omega^2 + \nu, \ldots \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \ldots \omega^2 + \omega\nu, \omega^2 + \omega\nu + 1, \ldots \omega^3, \omega^3 + 1, \ldots \\ \ldots (\nu_n\omega^n + \nu_{n-1}\omega^{n-1} + \cdots + \nu_1\omega + \nu_0), \ldots \omega^\omega, \omega^\omega + 1, \ldots \omega^{\omega+1}, \ldots \omega^{\omega^n}, \ldots \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \varepsilon, \varepsilon + 1, \ldots. \end{cases}$$

Jeder Punkt geht in der Ordnung aus allen vorhergehenden Punkten durch geometrische Operationen hervor. Jedoch lassen sich am Konstruktionsprozeß zwei verschiedene Methoden unterscheiden und dementsprechend gehören der Reihe zwei verschiedene Arten von Punkten als Elemente an. Die Punkte *erster* Art gehen aus der Gesamtheit aller vorangehenden Elemente durch einen einzigen Konstruktionsschritt hervor, nämlich durch eine Projektion von dem zuletzt benutzten Additionszentrum aus. Sind z B. alle Elemente bis $\omega + 1$ bekannt und damit auch $(\omega + 1)'$, so entsteht das nächstfolgende Element $\omega + 2$ durch Projektion des Punktes $(\omega + 1)'$ aus dem Additionszentrum P_I^2. Die Punkte *zweiter* Art sind dagegen Grenzpunkte von Teilskalen gebildet aus Punkten erster Art; so ist $\omega 2$ der Grenzpunkt der Folge: $\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \nu, \ldots$ Deshalb ergibt sich:

Die Punkte erster Art haben ein in der Wohlordnung unmittelbar vorangehendes Element, die Punkte zweiter Art haben ein solches nicht und sie sind Häufungspunkte.

3. Bei Abzählung der konstruierten Punkte repräsentieren die Punkte der ersten Teilskala: $0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ die natürlichen ganzen Zahlen, der Punkt ω und alle folgenden sind die Repräsentanten der transfiniten Ordnungszahlen.

Mit anderen Worten:

Die durch den Konstruktionsprozeß erzeugte wohlgeordnete Punktemenge (V) *ist abzählbar durch die Ordnungszahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse.*

Die Punktereihe (V) ist in der Bezeichnungsweise Cantors eine lineare, wohlgeordnete, auf g nirgends dichte Menge. Die Teilreihe aller Punkte von (V) bis zu einem gegebenen Elemente von der Form:

$$\nu_n\omega^n + \nu_{n-1}\omega^{n-1} + \cdots + \nu_1\omega + \nu_0,$$

wo die ν_i ganze natürliche Zahlen darstellen, ist eine Menge erster Gattung n-ter Art. Ihre Häufungspunkte werden durch $\nu_0 = 0$ charakterisiert, jedoch sind Häufungspunkte verschiedener Ordnungen zu unterscheiden. So sind alle Punkte mit $\nu_0 = 0$, $\nu_1 \neq 0$ einfache Häufungspunkte; alle Punkte, für die $\nu_0 = \nu_1 = 0$, $\nu_2 \neq 0$, müssen als Häufungspunkte einfacher Häufungspunkte angesehen werden u. s. f. Die Ordnung eines Häufungspunktes ist durch den niedrigsten Exponenten gegeben, der in der obigen symbolischen Form vorkommt.

Die Scheidung der transfiniten Zahlen in solche *erster* und *zweiter* Art — je nachdem die gegebene Zahl ein ihr unmittelbar vorangehendes Element besitzt oder nicht besitzt — entspricht im Konstruktionsprozeß der Unterscheidung von Punkten *erster* und *zweiter* Art auf Grund des gleichen Kriteriums. Gewisse Rechengesetze der transfiniten Zahlen folgen unmittelbar aus der Struktur der konstruierten Punktemenge.

Der bisherige Konstruktionsprozeß besteht aus projektiven Grundkonstruktionen (1.)

4. Durch dieses Konstruktionsverfahren können anscheinend nur Punkte von der Form:

$$\nu_n\omega^n + \nu_{n-1}\omega^{n-1} + \cdots + \nu_0$$

wirklich erreicht werden, wobei ν_i endliche ganze Zahlen bedeuten. Die Konstruktion des Punktes ω^ω erfordert bereits unendlich viele Schritte; dieser und die ihm folgenden scheinen durch den Konstruktionsprozeß höchstens gedanklich erfaßt zu werden. Für die bekannten transfiniten ε-Zahlen Cantors:

$$\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \varepsilon,\ \varepsilon + 1,\ \varepsilon + 2, \ldots$$

müßte danach die geometrische Konstruierbarkeit längst aufgehört haben.

In Wirklichkeit ist das nicht so. Vielmehr ist es sogar möglich, nach Konstruktion der ersten Teilmenge: $0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots \omega$ eine weitere gegebene transfinite Zahl, z. B. ε,

mit *einem* Konstruktionsschritte durch einen gegebenen Punkt der Gerade g zu repräsentieren. Maßgebend hierfür ist die Tatsache, daß der bisherige Konstruktionsprozeß projektiv ist. Die zuerst konstruierte Teilreihe:

$$0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots \omega$$

werde vom Punkte 0 aus in der Richtung $\vec{01}$ im Ähnlichkeitsverhältnis:

$$\zeta = \frac{0\omega}{01}$$

gestreckt. Der Punkt 0 bleibt dabei fest, der Punkt 1 geht in den Punkt ω über; die weiteren Punkte der neuen Skala seien bzw.:

$$\omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^\nu, \ldots \omega^\omega$$

so daß der letzte Punkt ω^ω aus ω durch Streckung hervorgeht und vom Anfangspunkte 0 den Abstand $\zeta \cdot |0\omega|$ besitzt. Dann gilt:

$$0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots \omega \sim 0, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^\nu, \ldots \omega^\omega$$

Die Skalenteile zwischen zwei gegebenen Punkten ω^ν und $\omega^{\nu+1}$ fügen sich nach dem vorher angegebenen Konstruktionsprozeß von selbst ein, so daß jeder Punkt bis ω^ω einschließlich durch eine endliche Zahl von Konstruktionsschritten erreicht wird. Die Wiederholung der Ähnlichkeitskonstruktion führt direkt zu den ε-Zahlen. Eine abermalige Streckung von 0 aus im Verhältnis ζ führt die Reihe: $0, \omega, \omega^2, \ldots \omega^\omega$ über in: $0, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \varepsilon$. Der Punkt $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \varepsilon$ stellt dabei die kleinste ε-Zahl dar und liegt wegen der Beziehung:

$$0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots \omega \sim 0, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^\nu, \ldots \omega^\omega \sim 0, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \varepsilon$$

in der Entfernung $\zeta^2 |0\omega|$ vom Anfangspunkte 0. Abermals lassen sich die Intervalle zwischen zwei neuen Punkten, etwa zwischen ω^ω und ω^{ω^ω}, nach dem ersten Konstruktionsverfahren mittels Additionszentrum und Projektionszentrum ausfüllen.

Die transfiniten ε-Zahlen, die von den natürlichen Zahlen und von ω ausgehend durch Addition, Multiplikation und deren Wiederholungen in endlicher Schreibweise nicht darstellbar sind und die deshalb einer besonderen Schreibweise bedürfen, werden geometrisch durch Punkte eingeführt, die durch geometrische Grundkonstruktionen von endlicher Zahl nicht mehr erreichbar sind; ihre Bestimmung erfolgt durch absolute Grundkonstruktionen (1.).

Eingegangen 12. Januar 1933.

Eine Lücke in Leonhard Eulers Beweis, daß eine ganze rationale Funktion einer Veränderlichen nicht nur Primzahlen darstellen kann.

Zur 150. Wiederkehr des Todestages von **Leonhard Euler,** 18. September 1933.

Von *Wilhelm Lorey* in Leipzig.

In seiner Abhandlung „De numeris primis valde magnis“ [1]) kommt Euler von der durch ihn als falsch erkannten Fermatschen Behauptung, daß alle Zahlen der Form $2^{2^n}+1$ Primzahlen seien, zu dem *Theorema*:

Nulla datur progressio algebraica, cuius omnes termini sint numeri primi.

Diesen Satz hatte Goldbach ihm schon in einem Brief vom 28. September 1743 allerdings ohne Beweis mitgeteilt, was Euler aber offenbar vergessen hat, als er am 28. Oktober 1752 Goldbach seinen Beweis mitteilte [2]).

Eulers Beweis verläuft so: Es sei in seiner Bezeichnung

$$X = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \text{usw.}$$

und

$$A = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4 + \zeta a^5 + \eta a^6 + \text{usw.}$$

Setzt man nun $x = nA + a$, dann wird X durch A teilbar, also keine Primzahl.

Der Herausgeber dieser Eulerschen Abhandlung in den Opera omnia, Ferdinand Rudio, hat schon in einer Anmerkung darauf hingewiesen, daß dieser Beweis hinfällig

---

[1]) Novi commentarii acad. scient. Petropolit. 9 (1762/63) 1764. Eneström-Verzeichnis 283. Leonhardi Euleri Opera omnia series I, volumen III, pag. 4f. Merkwürdigerweise findet sich in dieser Zeit oft die Schreibweise xx statt x^2.

[2]) Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle. Publiée par P. H. Fuß, St. Petersburg, 1843, Tome I, pag. 257, pag. 589. Die Fermatsche Behauptung wird in dem Briefwechsel oft erwähnt. Schon in seinem ersten aus Moskau vom 1. September 1729 datierten Brief sagt Goldbach in einem Postskriptum: Notane tibi est Fermatii observatio omnes numeros hujus formulae 2^{2^x-1} nempe 3, 5, 17, etc. esse primos, quam tamen ipse fatebatur se demonstrare non posse, et post eum nemo, quod sciam, demonstravit (a. a. O. pag. 10). In seiner Antwort datiert Petropoli den 8. Januar 1730 sagt Euler: Nihil prorsus invenire potui, quod ad Fermatinam observationem spectaret. Sed nondum prorsus persuasus sum, quomodo sola inductione id inferre legitime potuerit, cum certus sim ipsum numeris in formula 2^{2^x} loco x substituendis nec ad senarium quidem pervenisse (a. a. O. pag. 18). In der Tat hat Euler selbst bald gefunden, daß $2^{32}+1$ durch 641 teilbar ist. Wenn er in seinem vorstehend angeführten Brief an Goldbach sagt, daß Fermat sicher nicht bis zur sechsten Zahl untersucht hat, so legt er entweder die von Goldbach benutzte Form zugrunde oder er beginnt mit $x = 0$. Diese Eulersche Entdeckung steht in einer 1732 der Petersburger Akademie vorgelegten Arbeit: Observationes de theoremata quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectandibus (Eneström-Verzeichnis 26. Opera omnia, series I, vol. 2, pag. 3.). In einer aus dem Jahre 1747 stammenden Arbeit,, Theoremata circa divisores numerorum (Eneström-Verzeichnis 134, Opera omnia, series I, vol. 2, pag. 73f.) zeigt er, daß er nur Divisoren der Form $64n+1$ zu untersuchen brauchte und so bald auf den Teiler 641 gekommen ist. Einen sehr eleganten kurzen Beweis, daß $2^{32}+1$ durch 641 teilbar ist, gibt Kraïtchik in seiner Zeitschrift „Sphinx“ (Revue mensuelle des questions récréatives 1932, Nr. 10, pag. 148). Er beruht auf der Zerlegung $641 = 5^4 + 2^4 = 1 + 5 \cdot 2^7$.

wird, z. B. für $X = 7 - 5x + x^2$ und $a = 1$, also $A = 3$; setzt man $x = 1 \cdot 3 + 1 = 4$, so wird $X = 3$, also wieder eine Primzahl.

Da der Eulersche Beweis ohne Hinweis auf diese Lücke anscheinend in Lehrbücher übergegangen ist, wie z. B. das so inhaltsreiche Buch von M. Kraïtchik, Théorie des Nombres, Paris 1922, Gauthier-Villars u. Cie., Seite 2 [3]), so soll diese kleine Lücke hier ausgefüllt werden: Es sei

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k = p$$

eine Primzahl für $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ (positiv ganz).

Setzt man nun nach Eulers Verfahren

$$x = x_\nu + p_\nu \cdot u \qquad (u \text{ positiv ganz}),$$

so wird

$$F(x) = F(x_\nu) + p_\nu \cdot u \left[F'(x_\nu) + \frac{p_\nu \cdot u}{2!} F''(x_\nu) + \cdots + \frac{(p_\nu u)^{k-1}}{k!} F^{(k)}(x_\nu) \right]$$

oder

$$F(x) = p_\nu + p_\nu \cdot u\, \varphi(u),$$

wo $\varphi(u)$ eine ganze Funktion $(k-1)$-ten Grades von u ist, die nicht identisch verschwinden kann; sie kann also höchstens für $k-1$ Werte von u verschwinden, für die dann $F(x)$ wieder die Primzahl p_ν würde. Es ist also immer möglich, solche ganzzahligen Werte von u zu wählen, für die $\varphi(u) \neq 0$ ist, also $\frac{F(x)}{x}$ durch p_ν teilbar und somit keine Primzahl.

Wenn diese Lücke bei Lehrbuchverfassern noch nicht beachtet worden ist, so erklärt sich das vielleicht durch die Tatsache, daß die bekannten Funktionen, die eine große Anzahl von Primzahlen darstellen wie $x^2 + x + 17$, $2x^2 + 29$, $x^2 + x + 41$, die für $x = 0, 1, \ldots, 16$ bzw. $0, \ldots, 28$ bzw. $0, \ldots, 39$ [4]) Primzahlen liefern, nur positive ganze Koeffizienten haben, so daß also für sie $\varphi(u)$ sicher nicht verschwindet.

Euler erwähnt allerdings in einem Brief an Johann III. Bernoulli [5]) die Formel $41 - x + x^2$, deren 40 erste Glieder Primzahlen sind; er beginnt also mit $x = 1$; denn für $x = 40$ erhält man die Primzahl 1601. Dickson macht darauf aufmerksam, daß man die von Legendre stammende Formel $x^2 + x + 41$ erhält, wenn man in der Eulerschen Formel x durch $x + 1$ ersetzt. Ersetzt man darin x durch $x - 40$, so erhält man $x^2 - 79x + 1601$, eine Formel, die, wie Escotte [5a]) gezeigt hat, für $x = 0, 1, \ldots, 79$ Primzahlen liefert. Da aber für sie $f(x) = f(79 - x)$ ist, so tritt jede Primzahl von 1681 fallend bis 41 und wieder steigend bis 1681 zweimal auf. Natürlich enthält die Reihe der durch solche Funktionen gelieferten Primzahlen Lücken. Wie eine Prüfung der Escotteschen Reihe an Hand einer Primzahltabelle [6]) zeigt, gibt es durch

---

[3]) Auch Dickson gibt in seiner „History of the Theory of Numbers" (Published by the Carnegie Institution of Washington 1919) vol. I, pag. 420 den Grundgedanken des Eulerschen Beweises an, ohne die Lücke zu erwähnen. In seiner so inhaltsreichen Geschichte zitiert Dickson naturgemäß Euler sehr oft, aber leider nicht mit Hinweis auf die Opera omnia, deren hier in Betracht kommende 1915 bzw. 1917 erschienene Bände ihm offenbar infolge des Krieges noch nicht zugänglich gewesen sind.

[4]) Kraïtchik gibt a. a. O. Seite 3 irrtümlich als letzten Wert 40 an, der aber die Quadratzahl $1681 = 41^2$ liefert.

[5]) Eneströmverzeichnis 461; Nouveaux mémoires de l'académie des sciences de Berlin 1772, 1774; Histoires pag. 35—36; Opera omnia, ser. I, vol. 3, pag. 337.

[5a]) L'intermédiaire des math. 6, 1899, S. 10 f. Escotte gibt dort 9 Formeln, z. B. $2x^2 - 108x + 125q$.

[6]) Verfasser hat die Primzahltabelle benutzt, die Minding in seinem kleinen, heute wohl sehr unbekanntem guten Lehrbuch „Anfangsgründe der höheren Arithmetik" (Berlin, G. Reimer, 1832) Seite 194 bringt. Auf dieses Buch, das nach dem Urteil Knesers wohl der erste in Deutschland unternommene Versuch ist, die Ergebnisse der

sie nur die drei unmittelbar aufeinander folgenden Primzahlen 41, 43, 47. Die meisten Primzahlen, nämlich je 11, fehlen zwischen $f(0) = 1601$, $f(1) = 1529$, $f(2) = 1447$; je eine Lücke ist vorhanden zwischen $f(30) = 131$ und $f(31) = 113$, $f(32) = 97$ und $f(33) = 83$, $f(34) = 71$ und von 35 bis 61. Die größte Lückenanzahl ist 6, ihre Häufigkeit beträgt auch 6.

Eine sehr allgemeine Untersuchung solcher quadratischer Formen, auf die auch Rudio in der Eulerausgabe hinweist, hat Frobenius [7]) 1912 veröffentlicht; er knüpft darin an den oben erwähnten Brief Eulers an. „Wenn auch", so sagt Frobenius, „die Ergebnisse theoretisch von geringer Bedeutung sind, so wird doch, hoffe ich, dieser Beitrag zur *Arithmétique amusante* den Liebhabern der elementaren Zahlentheorie einiges Vergnügen bereiten". Euler hat in dem Brief nicht gesagt, wie er zu seiner Formel gekommen ist. Frobenius hält es aber für sicher, daß er sie im Zusammenhang mit der Untersuchung der von ihm eingeführten *numeri idonei*, gefunden hat. Numerus idoneus heißt eine Zahl $N = \alpha\beta$, wenn jede durch $f = \alpha x^2 + \beta y^2$, wo αx teilerfremd zu βy, darstellbare Zahl, eine Primzahl, oder das Quadrat einer Primzahl, oder das doppelte einer Primzahl, oder eine Potenz von 2 ist; f ist eine Primzahl, wenn es für sie nur *eine* solche Darstellung gibt [8]). In einem Brief an Beguelin vom Mai 1778 spricht Euler vom *valeur convenable* [9]) und gibt 1848 als größten an, mit dem er auf Grund der Formel $1848\,x + y^2$ folgende Zahlen als Primzahlen festgestellt hat: 1016401, 1103257, 1288057, 1487641, 1702009, 2995609, 4658809, 9094009, 11866009, 18518809. Bis jetzt kennt man keinen größeren „numerus idoneus" als 1848, obwohl die Untersuchung bis 100000 ausgedehnt worden ist [10]).

Über die Koeffizienten macht übrigens Euler selbst keine Angaben; er setzt offenbar stillschweigend voraus, daß sie ganze rationale Zahlen sind, damit für jeden ganzzahligen Wert von x der Wert seiner Funktion X ganzzahlig wird.

Goldbach macht aber in seinem Brief aus St. Petersburg vom 28. September 1743 diese Voraussetzung. Er sagt [11]):

Ob es zwar sehr leicht ist zu demonstrieren, daß keine formula algebraica hujus modi

$$a + bx + cxx + dx^3 \text{ etc.}$$

lauter numerus primos geben kann, posita x pro exponente terminorum, die coefficientes a, b, c, etc. mögen numeri integri quicunque, so gibt es doch formulas, welche vor vielen anderen eine Menge numerorum primorum in sich enthalten.

In seiner unmittelbaren Antwort auf den oben erwähnten Brief Eulers vom 28. Oktober 1752 liefert Goldbach auch einen Beweis. Er schreibt [12]):

Daß keine formula algebraica lauter numeros primos geben könne, hatte ich schon in einem meiner vorigen Briefe angemerket; denn es sey z. Ex. die formula:

$$x^3 + bxx + cx + e$$

Disquisitiones arithmeticae und der späteren arithmetischen Abhandlung von Gauß weiteren Kreisen zugänglich zu machen, hat Crelle 1832 dem Preußischen Kultusminister ein ausführliches Gutachten erstattet, in dem er das Buch als sehr geeignet für die Lehrer der Mathematik erklärt. Vgl. W. Lorey „Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts", IMUK III, 9, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1916, Seite 40.

[7]) „Über quadratische Formen, die viele Primzahlen darstellen. (Unter Benutzung einer Mitteilung des Herrn Dr. R. Remak)", Sitzungsberichte der phys.-math. Klasse der Kgl. Preuß. Akad. vom 17. Dezember 1912, Seite 966/980.

[8]) Vgl. Dickson a. a. O. pag. 361.

[9]) Eneströmverzeichnis 498; Nouveaux mémoires des l'académie des sciences de Berlin 1776, 1779, pag. 337/339. Opera omnia, ser. I, vol. 3, pag. 418/420.

[10]) Vgl. Dickson a. a. O. pag. 365.

[11]) a. a. O. pag. 257. Allerdings findet sich dort in der ersten Zeile ein Druckfehler: *eine* statt *keine*.

[12]) a. a. O. pag. 594. Die Seitenzahl ist durch einen Druckfehler mit 595 bezeichnet.

so ist offenbar, daß so oft x ein multiplus des termini absoluti e ist, so oft auch (und folglich infinitis modis) die formula einen numerum non primum geben wird, sollte aber $e = 1$ seyn, so setze ich nur $x + p$ anstatt x, alsdann wird die formula transmutiret in

$$\begin{aligned} x^3 + 3pxx + 3ppx + p^3 \\ bxx + 2bpx + bpp \\ cx + cp \\ +1 \end{aligned}$$

und so oft x ein multiplus numeri $p^3 + bpp + cp + 1$ ist, so oft gibt die formula einen numerum non primum. Da nun dieser casus, wo die potestas maxima ipsius $x = 3$ ist, auf alle andere lusus naturae, quaecunque fuerit potestas ipsius x, appliciret werden kann, so ist es unmöglich eine seriem algebraicam anzugeben, in welcher nicht infiniti termini aus numeris non primis bestehen sollten.

Euler ist im Briefwechsel mit Goldbach darauf nicht mehr eingegangen.

Bei dem Interesse am Goldbachschen Satze, das durch die Arbeiten Schnirelmanns in neuster Zeit wieder sehr geweckt worden ist, dürften die vorstehenden wörtlichen Zitate aus Goldbachschen Briefen auch einiges Interesse bieten. Der Briefwechsel wird wohl in der Serie 3 der gesammelten Eulerschen Werke abgedruckt werden. Auf diese Opera omnia Leonardi Euleri die jüngere Generation aufmerksam zu machen, sie zum Studium der jetzt bequem zugänglichen Eulerschen Schriften anzuregen, ist mit ein Zweck des vorstehenden kleinen Artikels. Gilt doch von Euler, was Frobenius als Vertreter der Berliner Akademie bei der Euler-Feier in Basel am 29. April 1907 gesagt hat [13]):

Euler hat bereits alle Fäden in der Hand gehalten, aus denen das bunte Gewebe der modernen Mathematik hervorgegangen ist. Wahrlich, an Genie hat es ihm nicht gefehlt. In einem Punkte sind ja vielleicht die Modernen genialer: in der Unklarheit. Aber die hatte freilich Euler nicht nötig, davor schützte ihn auch sein guter Verstand und seine Ehrlichkeit. Er hat stets mit großer Offenheit die ganze Entstehungsgeschichte, mit allen Wegen und Umwegen, die ihn dazu geführt hatten, mitgeteilt, und dann war er erst recht noch imstande, zum Schluß noch einen besonders feinen Weg zu bezeichnen, der direkter und noch eleganter zum Ziele führe.

Dieser von Frobenius hervorgehobene Vorzug der Eulerschen Arbeiten tritt deutlich auch in den hier benutzten hervor und soll zur 150. Wiederkehr seines Todestages besonders betont werden. Daher sei auch eine Äußerung von Gauß erwähnt, der in das erste von ihm benutzte Buch: Leiste, Anfangsgründe der allgemeinen Mathematik und Arithmetik. Braunschweig 1777 [14]) ein „Verzeichnis Eulerscher Schriften“ eingetragen hat.

Als Zweiundsiebzigjähriger schreibt Gauß am 16. September 1849 an P. H. von Fuß in Petersburg [15]):

Es ist meine Überzeugung, daß das Studium aller Eulerschen Arbeiten doch stets die beste durch nichts anderes zu ersetzende Schule für die verschiedenen mathematischen Gebiete bleiben wird.

---

[13]) Angeführt nach Rudios Bericht über den Festakt in der Neuen Zürcher Zeitung vom 4. Mai 1907, abgedruckt im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Band 16, 1907, S. 329—332.

[14]) Über dieses im Gaußarchiv des Göttinger Universitätsbibliothek aufbewahrte Buch, das der junge Gauß sich hat durchschossen binden lassen, vgl. auch P. Maennchen, Die Wechselwirkung zwischen Zahlenreihen und Zahlentheorie bei Gauß. Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß. Herausgegeben von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Beiheft 6 zu den Nachrichten der Ges. d. Wiss. 1918 S. 3.

[15]) Vgl. P. Stäckel, Eine vergessene Abhandlung L. Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen. Bibliotheca mathematica 8, 3, S. 37.

Eingegangen 9. Februar 1933.